

Liviu JALBĂ, Dumitru STANOMIR,
Octavian STĂNĂȘILĂ

FIZICĂ PENTRU NEPOȚI

- CARTE DE ÎNVĂȚĂTURĂ -

COLECȚIA ALMA MATER STUDIORUM

București, 2015



Culegerea textului și tehnoredactarea

Luminița Cătănuș

Anamaria Pacea

Mădălina Florescu

Colaborator științific: dr.ing.mat. Eleodor Bistriceanu

*Tipărită la Regia Autonomă Monitorul Oficial
București, ROMÂNIA, în 1000 exemplare.*

ISBN 978-973-0-19285-8

CUPRINS GENERAL

VOLUMUL I

Prefață

CAPITOLUL 0 - MATEMATICĂ MINIMALĂ

PARTEA I - TEORIE ȘI EXEMPLE

CAPITOLUL 1 - FENOMENE MECANICE

CAPITOLUL 2 - FENOMENE TERMICE

PARTEA a II-a - COMPLETĂRI, ÎNTREBĂRI ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL 1' - FENOMENE MECANICE

CAPITOLUL 2' - FENOMENE TERMICE

Indice de nume și notații

VOLUMUL al II-lea

PARTEA I - TEORIE ȘI EXEMPLE

CAPITOLUL 3 - FENOMENE ELECTRICE ȘI MAGNETICE

CAPITOLUL 4 - FENOMENE OPTICE

CAPITOLUL 5 - FENOMENE ONDULATORII

PARTEA a II-a - COMPLETĂRI, ÎNTREBĂRI ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL 3' - FENOMENE ELECTRICE ȘI MAGNETICE

CAPITOLUL 4' - FENOMENE OPTICE

CAPITOLUL 5' - FENOMENE ONDULATORII

Indice de nume și notații

VOLUMUL al III-lea

PARTEA I - TEORIE ȘI EXEMPLE

CAPITOLUL 6 - SALTUL SPRE FIZICA MODERNĂ

CAPITOLUL 7 - ELEMENTE DE FIZICĂ ATOMICĂ ȘI

FIZICĂ NUCLEARĂ

PARTEA a II-a - COMPLETĂRI, ÎNTREBĂRI ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL 6' - SALTUL SPRE FIZICA MODERNĂ

CAPITOLUL 7' - ELEMENTE DE FIZICĂ ATOMICĂ ȘI

FIZICĂ NUCLEARĂ

MARI FIZICIENI AI LUMII

CRONOLOGIA EVENIMENTELOR CRUCIALE ÎN FIZICĂ

Formule și tabele de mărimi fizice

Indice de nume și notații

Bibliografie

Volumul I

FENOMENE MECANICE, FENOMENE TERMICE

CUPRINSUL VOLUMULUI I

Prefață

§0. MATEMATICĂ MINIMALĂ	pag. 17
-------------------------	---------

PARTEA I - TEORIE ȘI EXEMPLE

CAPITOLUL 1: FENOMENE MECANICE	pag. 39
---------------------------------------	---------

§1. CINEMATICĂ	pag. 40
----------------	---------

§2. DINAMICĂ	pag. 49
--------------	---------

§3. LUCRU MECANIC, ENERGIE, PUTERE	pag. 66
------------------------------------	---------

§4. IMPULS, CIOCNIRI	pag. 78
----------------------	---------

§5. STATICĂ	pag. 85
-------------	---------

§6. ELEMENTE DE MECANICA FLUIDELOR	pag. 106
------------------------------------	----------

CAPITOLUL 2: FENOMENE TERMICE	pag. 119
--------------------------------------	----------

§1. ELEMENTE DE TEORIA CINETICO – MOLECULARĂ	pag. 120
--	----------

§2. PROCESE TERMODINAMICE	pag. 130
---------------------------	----------

§3. CALORIMETRIE	pag. 145
------------------	----------

§4. PRINCIPIUL I AL TERMODINAMICII ȘI CONSECINȚE	pag. 149
§5. TRANZIȚII ALE STĂRILOR DE AGREGARE	pag. 159
§6. MAȘINI TERMICE, TIPURI DE MOTOARE TERMICE	pag. 166
§7. PRINCIPIUL AL II-LEA AL TERMODINAMICII	pag. 178

PARTEA a II-a

COMPLETĂRI, ÎNTREBĂRI ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL 1': FENOMENE MECANICE	pag. 187
CAPITOLUL 2': FENOMENE TERMICE	pag. 229
<i>Indice de nume și de notații</i>	pag. 257

PREFATĂ

Fizica este o știință a naturii („φύση”≡natura, în grecește). Ea studiază diverse tipuri de mișcări și fenomene ale materiei – mecanice, termice, electrice, optice, nucleare etc.

Sursele cunoașterii în Fizică (și nu numai) sunt: observația (≡contemplarea), experimentul (planificat sau nu), modelarea matematică și teoretizarea.

Există o multitudine de fenomene care trebuie descrise și explicate, nu doar observate; apoi ele trebuie măsurate și înțelese. De exemplu, căderea corpurilor, deplasarea mașinilor, avioanelor sau rachetelor, vânturile, ploile, lumina, microscopul, telescopul, curentul electric, înghețul și fierberea apei, prepararea mâncărilor și multe altele.

Obiectele din jurul nostru se mai numesc corpuri fizice și proprietățile lor sunt legate de formă, greutate, densitate, tipul suprafeței, dacă sunt sau nu conductibile termic sau electric etc.

Corpurile se clasifică în: solide (lemn, metal,...), lichide (apă, ulei,...), gaze (aer, abur, CO₂,...). Ele sunt alcătuite din molecule, care la rândul lor sunt divizibile în atomi și în „particule elementare”. Moleculele se află în mișcare permanentă – translație, rotație sau vibrație, care diferă la gaze, lichide și solide.

Corpurile se mai numesc substanțe și amestecul acestora, fără intervenții externe, se numește difuzie; de exemplu, moleculele de parfum difuzează în cameră, amestecându-se cu

moleculele de aer; o picătură de cerneală difuzează în apă și mierea în ceai; substanțele nutritive intră în intestin și apoi în sângele animalelor; difuzia are loc și la solide (de exemplu, sudura). Fiecare substanță poate trece prin cele trei stări de agregare – solidă, lichidă și gazoasă, în funcție de temperatura impusă. Astfel, apa solidă \equiv gheața și cea gazoasă \equiv aburul; dar și pământul/solul poate fi lichid (topit) sau fier (gazos). În modificarea stărilor de agregare ale unei și aceleiași substanțe, moleculele nu se modifică decât prin poziție sau viteză. Exemplele de acest fel continuă indefinit și se vor întinde pe tot parcursul cărții.

Cu bună știință am prezentat experimente mentale și nu lucrări de laborator.

Această carte este axată pe descrierea tipurilor principale de fenomene, așa cum s-a încetățenit în învățământul preuniversitar. În gimnaziu, Fizica a fost prezentată mai mult descriptiv, utilizând mai puțin Matematica; în liceu, s-a realizat un salt de adâncire a conceptelor și de lărgire a mijloacelor științifice de investigație. Pentru elevi și studenți este esențială înțelegerea de fond a conceptelor fundamentale și legilor, fără de care se rămâne la o simplă informare și incapacitate de progres.

Autorii nu sunt fizicieni, ci ingineri sau matematicieni și, pe deasupra, sunt ... părinți, care au cunoscut nevoia comunicării cu tinerii studioși și dificultățile de a împleni cu detașare matematica, fizica și aplicațiile lor minunate.

§ 0. MATEMATICĂ MINIMALĂ

În câteva pagini, reamintim unele noțiuni și rezultate de matematică, utilizate direct sau indirect în continuare. Până la 1800, Matematica și Fizica erau incluse în Filozofia Naturală, având o dezvoltare sinuoasă, comună. După aceea, cele două științe s-au separat, păstrând un împrumut permanent de metode, notații, adaptări și interpretări.

1. Numere reale și mărimi fizice

Numerele reale sunt obiecte matematice abstrase din observarea diverselor mulțimi din realitate. Cu numere se pot face diverse operații, cu etichetele „+”, „×” etc. și ele pot satisface sau nu anumite relații (de inegalitate, de divizibilitate etc.). Denumirea de numere reale provine de la faptul că, în esență, ele sunt măsuri ale unor mărimi fizice, chimice, economice din realitatea înconjurătoare – viteze, lungimi, mase, temperaturi, energii, costuri, dobânzi, intensități, tensiuni, dioptrii și atâtea altele.

Reamintim că **o mărime fizică este o proprietate exprimată printr-o valoare măsurată și unitatea de măsură** (de exemplu, 12 kg, 4 cm/s, 5,2 m, 6,3 volți etc.); așadar, mărimile fizice se exprimă prin numere „concrete”. Mărimile fizice fundamentale sunt 7, dar le amintim pe cele mai des întâlnite: timpul T (măsurat în secunde, s), lungimea L (m);

masa M (kg), precum și mărimi derivate: arie L^2 (m^2), volum L^3 (m^3), densitate ML^{-3} (kg/m^3), viteză LT^{-1} (m/s), accelerație LT^{-2} (m/s^2), exprimate în sistemul internațional de unități ($\equiv SI$).

În Fizică se întâlnesc (și vom întâlni!) situații unde se utilizează numere reale mari sau mici, dincolo de scala umană de cuprindere. Este esențială folosirea puterilor lui 10, cu exponenți pozitivi sau negativi.

Exemple: Masa Soarelui este $M_s \approx 1,99 \times 10^{30}$ kg; masa Pământului $M_p \approx 5,98 \times 10^{24}$ kg și a Lunii, $M_L \approx 7,36 \times 10^{22}$ kg. Masa electronului este $M_e \approx 9,1 \times 10^{-31}$ kg, iar sarcina electronului este $e \approx 1,6 \times 10^{-19}$ C.

Amintim totodată prefixele metrice:

deca (da) 10^1 , hecto (h) 10^2 , kilo (k) 10^3 , mega (M) 10^6 , giga (G) 10^9 , tera (T) 10^{12} , deci (d) 10^{-1} , centi (c) 10^{-2} , mili (m) 10^{-3} , micro (μ) 10^{-6} , nano (n) 10^{-9} , pico (p) 10^{-12} .

Exemple: $12 \text{ kg} = 12 \times 10^3 = 12\,000 \text{ g}$; $4 \text{ cm/s} = 4 \times 10^{-2} \text{ m/s}$; $50 \text{ km/h} = 50 \times 10^3 \text{ m} / 3600 \text{ s} \approx 13,9 \text{ m/s}$; raza Pământului este de $6380 \text{ km} = 6,38 \text{ Mm}$, raza unei molecule este circa $10^{-9} \text{ m} = 1 \text{ nm}$ și a unui atom de $10^{-10} \text{ m} = 100 \text{ pm}$. Apoi, $1 \text{ an} = 365 \text{ zile} = 365 \times 24 \times 3600 = 86400 \text{ s}$, $1 \text{ litru (L)} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ etc.

Presupunem cunoscute proprietățile de calcul (regulile de joc) cu numere de tipul:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

De asemenea,

$$|a+b| \leq |a|+|b|, \sqrt{a^2} = |a| = \max(a, -a), \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Dacă $\alpha > 0$, reprezentarea lui zecimală este de forma:

$$\alpha = a, b_1 b_2 b_3 \dots$$

unde a este partea întreagă, notată

$$a = [\alpha]$$

și b_k sunt cifrele zecimale ($0 \leq b_k \leq 9$). Trunchierile lui α sunt

$$\alpha_{(1)} = a + b_1 / 10, \quad \alpha_{(2)} = a + b_1 / 10 + b_2 / 10^2 \quad \text{și, evident,}$$

$$|\alpha - \alpha_{(k)}| \leq 10^{-k} \text{ pentru orice întreg } k \geq 1.$$

Exemplu: Dacă $\alpha = 17,3122\dots$, atunci $\alpha_{(1)} = 17,3$ și $\alpha_{(2)} = 17,31$.

Orice număr real are, de asemenea, o reprezentare geometrică pe orice axă. Se numește **axă** orice dreaptă pe care sunt dispuse convențional 0, 1, ∞ . Distanța dintre două numere reale a, b este $|a - b|$. Numerele reale cuprind numerele naturale $n \in \mathbb{N}$ (\equiv cardinale de mulțimi finite), numerele întregi \mathbb{Z} , cele raționale \mathbb{Q} și cele iraționale ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Printre numerele reale remarcabile, amintim constantele matematice $\pi \approx 3,1416$ și $e \approx 2,7183$, cu $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!})$ și α

$$\approx 0,6180, \text{ numărul de aur: } \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

În această carte, vom prezenta multe constante fizice legate de fenomene fundamentale.

2. Puțină trigonometrie

Fixăm un plan (de exemplu, planul idealizat al acestei hârtii). Un **segment** orientat AB este o pereche ordonată de

puncte A, B din plan; **măsura** segmentului este lungimea lui (\equiv distanța dintre punctele A, B) și este notată tot AB , în absența confuziei.

Un **unghi** xOy este figura geometrică formată din două semidrepte Ox, Oy având un capăt comun (figura 0.1).

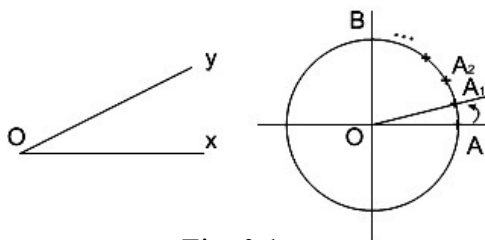


Fig. 0.1

Măsura acestui unghi în grade sexagesimale se obține astfel: prin convenție, cercul are 360° (a fost ales numărul 360, deoarece are mulți divizori!) și sfertul de cerc va avea 90° . Împărțind arcul \widehat{AB} în 90 de părți egale, se obține prototipul unghiului AOA_1 având măsura 1° . Unghiul de 1 radian are măsura $180^\circ/\pi \approx 57^\circ 18'$ și în general

$$\alpha[rad] = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha[grad]$$

Considerăm un unghi ascuțit xOy de măsură α , un punct $M \in Oy$ și ducem $MN \perp Ox$ (figura 0.2).

Rapoartele de lungimi: $\frac{MN}{OM}, \frac{ON}{OM}, \frac{MN}{ON}$, sunt

independente de alegerea lui M pe Oy și depind doar de α ; ele sunt numere reale (adimensionale), notate respectiv cu $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$.

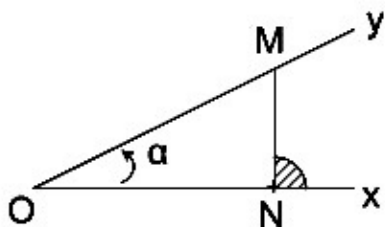


Fig. 0.2

Desigur, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ și așa se dezvoltă „psaltirea” formulelor trigonometrice. Funcțiile trigonometrice se extind la unghiuri de orice măsură, folosind cercul trigonometric, așa cum vom reaminti imediat.

3. Radicali, puteri, logaritmi

Dacă $a \geq 0$, ecuația $x^2 = a$ are două soluții și cea pozitivă este **radicalul** \sqrt{a} . Ecuația $x^3 = a$ are o singură soluție reală, anume $\sqrt[3]{a}$.

Desigur, dacă $a, b \geq 0$, atunci:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}, \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\text{Dacă } a \in \mathbb{R}: \sqrt{a^2} = |a|, \sqrt[3]{a^3} = a.$$

Similar, fie $a \geq 0$ și n natural par, atunci $\sqrt[n]{a} \equiv a^{\frac{1}{n}}$ este unica soluție **reală și pozitivă** a ecuației binome $x^n = a$, iar dacă $a \in \mathbb{R}$ și n este impar, $\sqrt[n]{a} \equiv a^{\frac{1}{n}}$ este unica soluție **reală** a ecuației $x^n = a$.

Dacă $a > 0$, se definește puterea a^α de exponent real α , punând: $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ etc., cu proprietățile uzuale.

Logaritmul unui număr $N > 0$, $\log_a N$ (în baza a) este acel unic număr real x , astfel încât $a^x = N$; $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$. Prin convenție, logaritmi în baza 10 (respectiv e) se numesc zecimali (respectiv naturali): $\log_{10} N = \lg N$, $\log_e N = \ln N$.

Se cunosc proprietățile logaritmilor și nu mai insistăm.

4. Vectori

Vectorii se asimilează cu segmente orientate, dar apar aspecte noi. **A da un vector** pentru $B \neq A$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, revine la a fixa punctul său de aplicație A , suportul său (dreapta AB), sensul de la A spre B și mărimea vectorului, notată cu

$$v = \|\vec{v}\| = d(A, B) = \text{distanța } AB \text{ (figura 0.3).}$$

Dacă $A = B$, vectorul \overrightarrow{AB} este $\vec{0}$ (vectorul nul). Vectorii având mărimea 1 se numesc **versori**.

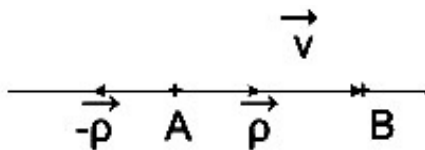


Fig. 0.3

Orice vector nenul \vec{v} are doi versori $\pm \vec{p}$, unde $\vec{p} = \frac{1}{v} \vec{v}$.

Prin convenție, doi vectori \vec{v} și \vec{w} se consideră **egali** ($\vec{v} = \vec{w}$), dacă au aceeași direcție (adică dreptele lor suport sunt

paralele sau identice), același sens și aceeași mărime (fig. 0.4). Așadar, vectorii egali „închid” un paralelogram, eventual degenerat.

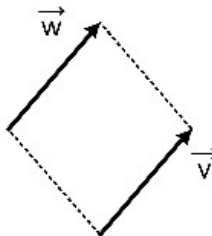


Fig. 0.4

Dacă $\vec{v} = \vec{w}$, se mai spune că \vec{w} este o **copie** a lui \vec{v} .

Dacă \vec{v} este fixat, atunci pentru orice punct A există și este unic un punct B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Vectorul nul este $\vec{0} = \overrightarrow{AA} (= \overrightarrow{BB})$ și dacă $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ atunci **opusul** lui este $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

Suma (\equiv rezultanta) a doi vectori se face folosind „regula paralelogramului”; se pot aduna și vectori care nu au același punct de aplicație (figura 0.5).

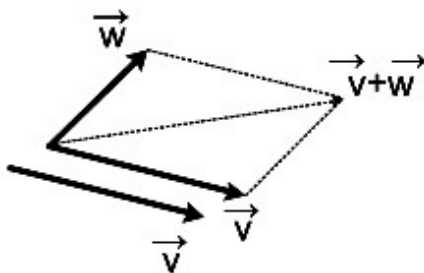


Fig. 0.5

Dacă $a > 0$ este un număr real, atunci multiplicatul $a\vec{v}$ este un vector având același punct de aplicație cu \vec{v} , aceeași direcție și același sens, dar mărimea de a ori mai mare.

Dacă $a < 0$, atunci $a\vec{v} = -((-a)\vec{v})$, de exemplu, $(-2)\vec{v} = -(2\vec{v})$. Bineînțeles, $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$.

Ca multiplicatori de vectori, numerele reale ca atare sau exprimând anumite mărimi se mai numesc **scalari**. Se poate considera suma mai multor vectori.

Atenție! nu are sens o inegalitate de forma $\vec{v} < \vec{w}$, dar are sens $v < w$, adică lungimea lui \vec{v} este mai mică decât lungimea lui \vec{w} .

Notă: Dacă $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$ atunci suma $\vec{v} + \vec{w}$ se poate obține și prin următoarea „regulă a triunghiului” (figura 0.6): se consideră copia lui \vec{w} având punctul de aplicație în B , anume, $\vec{w} = \overrightarrow{BE}$. Atunci $CDEB$ este un paralelogram și $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

Fixăm (doar în gând!) un punct O , numit referențial.

Pentru orice alt punct $M \neq O$, vectorul $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ se numește **vectorul de poziție** al lui M ; versorul lui este $\vec{\rho} = \frac{1}{r}\vec{r}$.

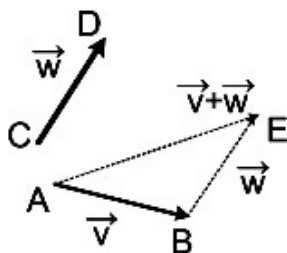


Fig. 0.6

Se mai notează \vec{r}_M în loc de \overrightarrow{OM} .

Aplicații:

1) Dacă M și N sunt două puncte, atunci $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$ deci $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$. Așadar, orice vector este vectorul de poziție al extremității minus vectorul de poziție al capătului: $\overrightarrow{MN} = \vec{r}_N - \vec{r}_M$, (independent de alegerea punctului referențial).

2) Fie O un punct material de masă m , privit ca „atractor”. Orice alt punct material M de masă m' este „atras” de O , conform legii lui Newton a atracției universale, cu forța:

$$F = \frac{km m'}{r^2}, \quad k > 0, \quad r = OM. \text{ Ca vector: } \vec{F} = -F \vec{\rho}, \quad \vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{r}$$

unde $\vec{\rho}$ este versorul lui \overrightarrow{OM} (figura 0.7).

Semnul „-” este datorat faptului că O este atractor.

$$\text{Așadar, } \vec{F} = -\frac{km m'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \text{ adică, } \vec{F} = -\frac{A}{r^3} \vec{r},$$

unde $A = km m'$ este un **scalar pozitiv**.

Reținem că fiecărui punct M i se asociază un vector $\vec{F} = \vec{F}(M)$. Se spune că atractorul O creează un câmp de vectori, numit **câmpul gravitațional** generat de O .

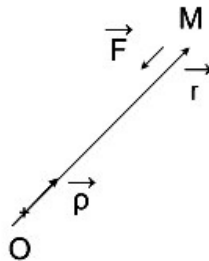


Fig. 0.7

5. Cercul trigonometric

Să considerăm un cerc (C) cu centrul într-un punct O , de rază 1 (de exemplu, 1 cm) și două diametre perpendiculare AA' , BB' (figura 0.8).

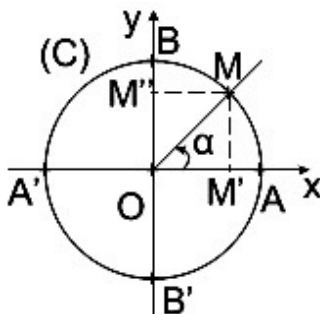


Fig. 0.8

Se obține astfel un reper ortonormal plan xOy , cu versorii $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$. Pentru orice unghi de măsură α (în radiani) există un singur punct $M \in (C)$ astfel încât $\angle AOM = \alpha$.

Se definesc atunci cosinusul și sinusul lui α ca fiind coordonatele punctului M , $\cos \alpha = x_M$, $\sin \alpha = y_M$.

Exemple: $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$; $\cos \pi/2 = 0$, $\sin \pi/2 = 1$; $\cos \alpha = \sin(\pi/2 - \alpha)$ apoi $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$, $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ etc.

Dacă M' , M'' sunt proiecțiile lui M pe axele Ox și Oy , atunci:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \quad (1)$$

6. Operații cu vectori

Să notăm cu V_2 mulțimea vectorilor plani (cu suportul într-un plan fixat).

Dacă $\vec{v}, \vec{w} \in V_2$ și $a \in \mathbb{R}$ este un scalar, am definit egalitatea $\vec{v} = \vec{w}$, suma $\vec{v} + \vec{w}$ și multiplicarea $a\vec{v}$ și avem $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$, $\|a\vec{v}\| = |a| \|\vec{v}\|$.

Nu au sens: câtul \vec{v}/\vec{w} (în afara cazului când vectorii ar fi coliniari) sau $\sqrt{\vec{v}}, \vec{v}^3, \log_{10} \vec{v}$.

Se definesc două operații noi: produsul scalar și produsul vectorial a doi vectori, utilizate curent în Fizică.

Dacă $\vec{v}, \vec{w} \in V_2$, **produsul scalar**, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ notat și $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ este scalarul $\vec{v} \cdot \vec{w} = v \cdot w \cdot \cos \alpha$, unde $\alpha = \text{măs} \sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})$, adică produsul mărimilor celor doi vectori prin cosinusul unghiului dintre ei.

Cu notații transparente, au loc următoarele **proprietăți**:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} \quad (,comutativitate"),$$

$$(a\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot (a\vec{w}) \quad (,balansarea scalarului"),$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{w}') = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}' \quad (,distributivitatea produsului scalar")$$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$, deci $v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$. Apoi, dacă \vec{v} sau \vec{w} este nul, atunci

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. În fine, dacă \vec{v}, \vec{w} sunt nenuli, ei sunt perpendiculari, adică $\alpha = \pi/2 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Fie acum \vec{v}, \vec{w} doi vectori nenuli. Se definește un al treilea vector, notat $\vec{v} \times \vec{w}$ sau $[\vec{v}, \vec{w}]$, numit **produsul lor vectorial**. Putem presupune că \vec{v} și \vec{w} au același punct de aplicație $\vec{v} = \overrightarrow{OA}, \vec{w} = \overrightarrow{OB}$ și considerăm acel unic punct C din

spațiu, astfel încât vectorul \overrightarrow{OC} să fie perpendicular pe \vec{v} și \vec{w} , cu sensul dat de „regula burghiului” (figura 0.9):

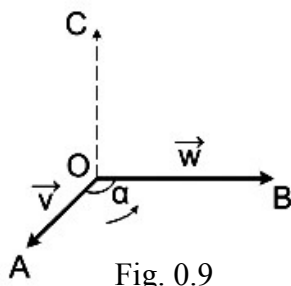


Fig. 0.9

așadar, rotind \vec{v} în sensul burghiului până ce se suprapune peste \vec{w} burghiul înaintează precum \overrightarrow{OC} . În fine, prin definiție, mărimea OC este numeric egală cu aria A a paralelogramului construit pe vectorii \vec{v} , \vec{w} .

Reamintim că dacă $ABCD$ este un paralelogram (figura 0.10), atunci aria lui este $A = DC \cdot AA' = DC \cdot DA \cdot \sin \alpha$. Așadar, $\vec{v} \times \vec{w} = \overrightarrow{OC}$, $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = A = v \cdot w \cdot \sin \alpha$. Notând \vec{k} = versorul lui \overrightarrow{OC} , avem $\vec{v} \times \vec{w} = A \vec{k}$; este greșit să scriem $\vec{v} \times \vec{w} = A$.

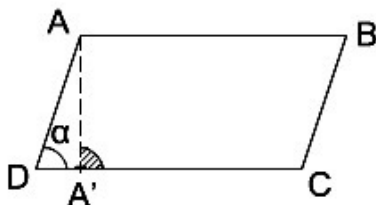


Fig. 0.10

Proprietățile principale ale produsului vectorial sunt:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v} \quad (\text{„anticomutativitate”})$$

$$(a\vec{v}) \times \vec{w} = a(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \times (a\vec{w}) \quad (\text{„balansarea scalarului”})$$

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{w}') = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}' \quad (,distributivitatea")$$

$$\vec{v} \times \vec{v} = 0 ; \text{dacă } \vec{v} \text{ sau } \vec{w} \text{ este nul atunci } \vec{v} \times \vec{w} = 0.$$

În fine, dacă \vec{v} și \vec{w} sunt nenuli, $\vec{v} \times \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}, \vec{w}$ sunt coliniari (adică au suporturile paralele).

Aplicații:

- 1) **Teorema cosinusului** Fie ABC un triunghi cu lungimile laturilor a, b, c . Avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, deci $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ și $BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \cos \hat{A}$, adică:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Fie $\vec{v} = \overrightarrow{OA}, \vec{w} = \overrightarrow{OB}$ doi vectori oarecare și fie $\overrightarrow{OC} = \vec{v} + \vec{w}$ (figura 0.11). Notând $\alpha = \text{măs} \angle(\vec{v}, \vec{w})$, avem $\text{măs} \angle OAC = \pi - \alpha$ și aplicăm teorema cosinusului în ΔOAC :

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2OA \cdot AC \cdot \cos(\pi - \alpha)$$

Deoarece $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ rezultă **mărimea rezultantei** (sumei) a doi vectori:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = v^2 + w^2 + 2vw \cos \alpha, \text{ unde } \alpha = \text{măs} \angle(\vec{v}, \vec{w}), \quad (2)$$

Este greșită relația $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$.

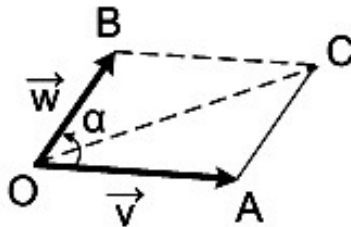


Fig. 0.11

2) Identitatea lui Lagrange

Pentru orice vector \vec{v} , se notează $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$, deci $\vec{v}^2 = v^2$.

Dacă $\vec{v}, \vec{w} \in V_2$, atunci $(\vec{v} \times \vec{w})^2 = v^2 w^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2$.

Într-adevăr,

$$(\vec{v} \times \vec{w})^2 = \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = v^2 w^2 \sin^2 \alpha = v^2 w^2 (1 - \cos^2 \alpha) = v^2 w^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2$$

7. Puțină Geometrie analitică 2D

Să considerăm un reper ortonormal xOy și fie \vec{i}, \vec{j} versorii axelor perpendiculare Ox, Oy (figura 0.12).

Așadar, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$, (este greșit să scriem $\vec{i} = \vec{j}$). Pentru orice punct M din plan, cu proiecțiile M', M'' pe cele două axe, există scalari a, b (tocmai **coordonatele carteziene** ale lui M), astfel încât $\overrightarrow{OM'} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{OM''} = b\vec{j}$.

Conform regulii paralelogramului $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$.
Așadar, $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $M(a, b) \Leftrightarrow$ vectorul sau de poziție este:

$$\vec{r}_M = a\vec{i} + b\vec{j}. \quad (3)$$

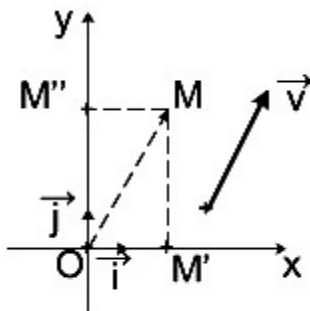


Fig. 0.12

Fie acum $\vec{v} \in V_2$ un vector arbitrar. Atunci există și este unic un punct M , astfel încât $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ deci, conform (3)

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

Numerele reale a, b se numesc **componentele scalare** ale vectorului. Dacă $\vec{w} = c\vec{i} + d\vec{j}$ este un alt vector din V_2 , deoarece

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$$

rezultă:

$$(a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot (c\vec{i} + d\vec{j}) = ac(\vec{i} \cdot \vec{i}) + ad(\vec{i} \cdot \vec{j}) + bc(\vec{j} \cdot \vec{i}) + bd(\vec{j} \cdot \vec{j}), \text{ deci:}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = ac + bd. \quad (4)$$

Aceasta este **expresia analitică** a produsului scalar. Se poate arăta că vectorul $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$ este versorul perpendicular pe planul xOy dat de regula burghiului rotit de la \vec{i} la \vec{j} și, în plus, $\vec{v} \times \vec{w} = (ad - bc) \cdot \vec{k}$.

Avem următoarele proprietăți de calcul:

$$\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow a = c, b = d$$

$$\vec{v} \pm \vec{w} = (a \pm c)\vec{i} + (b \pm d)\vec{j}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \vec{v} = (\lambda a)\vec{i} + (\lambda b)\vec{j}$$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = a^2 + b^2$, deci $v = \sqrt{a^2 + b^2}$ (mărima unui vector este radical din suma pătratelor componentelor lui

scalare). În fine, $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow ac + bd = 0$, vectorii nenuli \vec{v} și \vec{w} sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ și $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v \cdot w} = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}}$.

Exemplu: Fie $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{w} = a\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ dacă $\vec{v} \perp \vec{w}$ și apoi să se calculeze $\|\vec{v} + \vec{w}\|$.

Avem $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2a - 3, \vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$. În acest caz,

$$\vec{v} + \vec{w} = \frac{7}{2}\vec{i} + 2\vec{j}, \|\vec{v} + \vec{w}\| = \sqrt{\frac{49}{4} + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{65}.$$

Aplicație:

Stabilim formula $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

Pentru aceasta, considerăm versorii \vec{v}, \vec{w} care fac respectiv unghiurile α, β cu semiaxa pozitivă Ox (figura 0.13).

Conform (1), rezultă $\vec{v} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ și $\vec{w} = \cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j}$.

Calculăm în două moduri produsul scalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

Pe de-o parte, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \cos(\alpha - \beta)$ și pe de-alta:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})(\cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j}) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

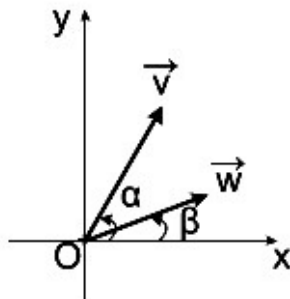


Fig. 0.13

În încheiere, reamintim că **ecuația** unei figuri geometrice plane F din planul xOy este legătura algebrică între coordonatele x, y ale unui punct curent M , care rezultă din condiția geometrică pură ca punctul M să aparțină figurii F . Astfel, axa Ox (respectiv Oy) are ecuația $y=0$ (respectiv $x=0$). Ecuația dreptei care trece prin origine și face unghiul α („panta”) cu semiaxa Ox este $y=x \operatorname{tg} \alpha$, iar ecuația cercului trigonometric este $x^2+y^2=1$.

Ecuația dreptei care trece prin punctul (x_o, y_o) cu panta $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, având coeficientul unghiular $m=\operatorname{tg} \alpha$ este $y-y_o=m(x-x_o)$.

8. Elemente de Analiză matematică

Analiza matematică este studiată în mod sistematic în clasele a XI-a și a XII-a. Ne restrângem aici la un minim necesar. Pentru o funcție reală $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe un interval I și pentru $a \in I$ diferența $\Delta f = f(x) - f(a)$ se numește **creșterea** lui f începând din punctul a , iar raportul $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se numește **rata** (\equiv viteza) **medie** de variație a

funcției f între punctele a și x ($x \neq a$). Limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$,

presupusă finită, se numește **derivata întâi** a lui f în punctul

a , notată $f'(a)$. Așadar, $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, ceea ce justifică

notația $\frac{df}{dx}(a)$. Într-un punct curent

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (5)$$

Exemple: O funcție constantă pe un interval are derivata identic nulă și reciproc. Apoi, dacă $f(x) = mx + n$, cu m, n constante reale, atunci $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + n - mx - n}{h} = m$;

Dacă $f(x) = mx^2$, atunci

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h)^2 - mx^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2mx + mh) = 2mx$$

Se mai scrie $(mx + n)' = m$, $(mx^2)' = 2mx$.

De asemenea, se poate arăta că $(\sin mx)' = m \cos mx$ și $(\cos mx)' = -m \sin mx$; apoi, $(e^{mx})' = me^{mx}$; în fine, pentru funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ avem $f'(x) = \frac{1}{x}$ și pentru

$g(x) = \frac{1}{x}$ avem $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Un fapt important: două funcții

derivabile (\equiv au derivate finite), care au aceeași derivată pe un interval diferă printr-o constantă.

Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă în fiecare punct al lui I , cu derivata derivabilă, se poate considera derivata a doua

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Un punct $a \in I$, unde $f'(a) = 0$ și $f''(a) > 0$ (respectiv < 0), este de minim (respectiv maxim) local pentru funcția f , $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Pentru o funcție derivabilă, se spune că graficul ei $G_f = \{x, f(x) / x \in I\}$ este o curbă netedă și în fiecare punct $(a, f(a))$ există o tangentă (T) . Această dreaptă face cu semi-axa pozitivă Ox unghiul α , astfel încât $\operatorname{tg} \alpha = f'(a)$; ecuația tangentei (T) este $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Dacă $f(x), f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă (\equiv cu graficul G_f neîntrerupt), atunci se poate asocia un număr real,

numit **integrala lui f** de la a la b și notat $I = \int_a^b f(x) dx \equiv \int_{[a, b]} f$

având următoarele proprietăți:

a) Dacă f este o constantă A , atunci $\int_a^b A dx = A(b - a)$; în

particular, $\int_a^b dx = (b - a)$;

b) Dacă f, g sunt continue pe $[a, b]$ și $k \in \mathbb{R}$ este o constantă,

atunci $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ și

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx;$$

c) Dacă $c \in (a, b)$ este un punct intermediar, atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

d) Dacă $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue și $f \leq g$, atunci

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

e) Dacă $f \geq 0$ (adică graficul lui f este deasupra axei Ox), atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \text{aria trapezului curbiliniu hașurat}$$

$K = \{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$; (figura 0.14).

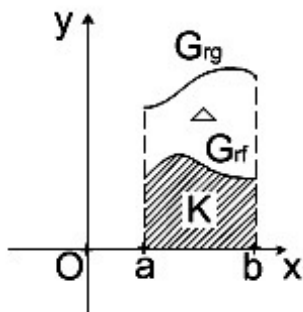


Fig. 0.14

De asemenea, dacă $f(x)$ reprezintă densitatea liniară a unei substanțe, atunci integrala $\int_a^b f(x) dx$ este tocmai **masa** acelei substanțe.

f) Dacă F este derivabilă pe $[a, b]$ și $F' = f$ (se spune atunci că F este o **primitivă** a lui f), atunci:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \equiv F(b) - F(a)$$

Aceasta se numește **formula Leibniz – Newton**.

Exemple:

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}, \int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

și pentru $0 < a < b$, $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a$.

Dacă $f \leq g$ pe $[a, b]$ și $\Delta = \{(x, y) / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$

atunci aria $\Delta = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$; (figura 0.14.).

PARTEA I - TEORIE ȘI EXEMPLE

CAPITOLUL 1 - FENOMENE MECANICE

Introducere

Copiii și nu numai ei își pun întrebări firești, de tipul: „De ce păsările zboară și porcii nu”, „de ce un cablu întins face săgeată”, „cum poate avansa o corabie cu pânze contra vântului neprielnic”, „cu ce viteză să mergem”, „cum stau stelele pe cer”, „de ce nu se scufundă marile vapoare”?... Răspunsul îl puteți da numai după studiul mișcărilor mecanice.

Mecanica studiază mișcarea, deplasarea în spațiu și în timp a corpurilor, cauzată sau nu de diverse forțe. Orice mișcare este o consecință a unor interacții fizice: un obiect care cade, o minge aruncată, rotația Pământului în jurul axei, acele unui aparat de măsură etc.

Mecanica are trei subcapitole: Cinematica (studiul mișcării fără a implica forțele); Dinamica (implicând forțele care cauzează mișcarea) și Statica – studiul echilibrului corpurilor. Fizica acordă, de asemenea, interes unor mișcări speciale – relativiste (la viteze comparabile cu viteza “ c ” a luminii) sau cuantice (la nivel atomic sau subatomic).

De la început precizăm că în acest capitol ne ocupăm de mecanica newtoniană (nerelativistă), în care obiectele de bază sunt, prin convenție, punctele materiale (\equiv particule zero-dimensionale având masă), numite și mobile punctuale. De

exemplu, Pământul în raport cu Soarele sau oricare om sau animal în raport cu Pământul sunt asimilate cu puncte materiale.

Mișcarea oricărui corp are loc în timp, doar relativ la (≡în raport cu) alte corpuri. De exemplu, mașinile se mișcă în raport cu casele, trenurile în raport cu șinele și rachetele cu Pământul sau Pământul – Soarele, Soarele – Galaxia. Pentru studiul sistematic al conceptelor și mișcărilor, Fizica a introdus mai multe tipuri de mărimi: **scalare** (timpul, aria, volumul, masa, densitatea, presiunea), exprimate prin numere reale însoțite de unități de măsură; **vectoriale** (viteza, accelerația, forța, impulsul), exprimate prin direcție, sens și mărime; **tensoriale**, **spinoriale** etc.

§ 1. CINEMATICĂ

1.1. Mișcarea rectilinie 1D

Aceasta are loc pe o axă – axa mișcării. La fiecare moment t (aflat pe axa timpului), se notează cu $s(t)$ =**drumul** parcurs unisens de o particulă (≡mobil) până la momentul t . Dacă $t_1 < t_2$, atunci $s(t_2) - s(t_1)$ este drumul parcurs de particulă în intervalul de timp $[t_1, t_2]$, iar raportul $v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ se

numește **viteza medie** a particulei în acel interval.

Exemplu: Să se determine viteza medie a unui mobil aflat în mișcare rectilinie, care la momentele $t_1=5$ s, $t_2=20$ s se află în punctele de abscise $x_1=100$, respectiv $x_2=400$.

Răspuns: $v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{400 - 100}{20 - 5} = 20 \text{ m/s.}$

Fixând t_0 , pentru orice $t \neq t_0$, se notează cu $v_m(t, t_0)$ viteza medie între t și t_0 și cu $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ **viteza**

instantanee a particulei la momentul t_0 ; așadar, $v(t_0)$ este limita vitezelor medii între t și t_0 , pentru $t \rightarrow t_0$.

Notăm cu $v(t)$ viteza particulei la orice moment t dintr-un interval de timp I (de exemplu $I = \mathbb{R}$). Se poate defini atunci **acclerația medie** $a_m(t, t_0)$ între momentele t și t_0 , ca fiind raportul $\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$.

Exemplu: Un automobil demarează de pe loc și este accelerat pentru a atinge viteza de 30 m/s în 10 s. Care este accelerația sa medie ?

Răspuns: $a_m = \frac{30 - 0}{10 - 0} = 3 \text{ m/s}^2$. Așadar, viteza

automobilului crește în medie cu 3 m/s în fiecare secundă.

Accelerația instantanee la momentul t_0 (presupunând că limita există) este

$$a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Accelerația apare ca rata (\equiv viteza) de variație a vitezei. Așadar,

$$v(t) = s'(t) \text{ și } a(t) = v'(t) = s''(t) \quad (6)$$

Pe scurt, viteza este derivata întâi, iar accelerația derivata secundă a **drumului parcurs**, în raport cu timpul.

Exemplu: Presupunând că $I=(0,1)$ și $s(t)=2t-t^2$, avem $v(t)>0$ și $a(t)<0$ pentru orice $t\in I$.

Aplicații:

1) Mișcarea rectilinie este **uniformă** dacă viteza $v(t)=v$ pentru orice t , este constantă, deci accelerația este nulă la fiecare moment. Reamintim că două funcții care au aceeași derivată pe un interval diferă printr-o constantă; deoarece $v(t)=v$, rezultă că $s'(t)=(vt)'$, deci $s(t)-vt=c$, constant, pentru orice t . Înlocuind $t=0$, rezultă $c=s(0)$ deci

$$s(t)=vt+s(0) \quad (7)$$

Graficul acestei funcții de gradul întâi este o dreaptă în planul t/s , având coeficientul unghiular egal cu v .

Notă: Dacă $s(0)=0$, atunci $s=vt$ și $v=s/t$; viteza se măsoară, în sistemul SI, în m/s. Iată câteva viteze întâlnite în natură: avem $1 \text{ m/s}=10^{-3} \text{ km/s}=10^{-3}\times 3600 \text{ km/h}=3,6 \text{ km/h}$, deci un atlet care aleargă („uniform”) 100 m în 10 s, are viteza de 36 km/h. Un pieton are viteza de circa 1,5 m/s. Sunetul are viteza de 340 m/s, iar lumina (în vid) are viteza $c=300\,000 \text{ km/s}$. Viteza moleculei de hidrogen la 0°C este de circa 1700 m/s.

Marele fizician italian Galileo Galilei a arătat că viteza unui corp se modifică doar dacă este acționat de alt corp; altfel spus, dacă asupra unui corp K nu acționează un alt corp, atunci K este fie în repaus, fie se mișcă rectiliniu și uniform. Tendința unui corp de a-și menține mișcarea se numește inerție („inertia” \equiv inactivitate, în latinește); de exemplu, după ce

motorul său a fost oprit și în lipsa altor forțe, o rachetă se mișcă prin inerție și nu poate fi oprită instantaneu.

2) Mișcarea rectilinie se numește **uniform accelerată** dacă accelerația $a(t)=a$ este constantă, cu $a>0$. În acest caz, $v'(t)=(at)'$, deci $v(t)-at=v(0)$ și similar, $s'(t)-(at^2/2)'=(v(0)t)'$, deci $s(t)-(at^2/2)-v(0)t=c$, constant; făcând $t=0$, rezultă $c=s(0)$. Notând $v(0)=v_0$ și $s(0)=s_0$, rezultă formulele:

$$\forall t, v(t)=v_0+at, s(t)=s_0+v_0t+\frac{at^2}{2} \quad (8)$$

Dacă $v_0=0$ și $s_0=0$, rezultă $v(t)=at$, $s(t)=(at^2/2)$ și $v^2=2as$, independent de t .

Exemple: 1) Un automobil oprit la stop repornește cu accelerația de 2 m/s^2 . Ce viteză va avea și cu câți metri se va depărta după 5 s ?

Răspuns: Așadar, $v_0=0$, $s_0=0$ și $a=2 \text{ m/s}^2$. Deci $v(t)=2t$ și $s(t)=2 \cdot (t^2/2)$ (după t secunde). Pentru $t=5$, viteza va fi de 10 m/s și distanța parcursă de 25 m .

2) Din gimnaziu se știe următorul fapt: căderea unui corp cu dimensiuni uzuale este un exemplu tipic de mișcare rectilinie uniform accelerată; începând la momentul $t=0$, deci $s_0=0$ și cu viteza inițială $v_0=0$, corpul are accelerația constantă, anume cea gravitațională $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$; conform (8), rezultă formulele căderii libere:

$$v=gt, s=\frac{gt^2}{2} \quad (9)$$

Eliminând t între aceste relații, rezultă relația $v^2=2gs$.

Dacă un corp cade de la înălțimea h , atunci timpul după care corpul ajunge la sol este:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ (se neglijează rezistența aerului).}$$

Dacă aruncăm o piatră, fără viteză inițială, de la înălțimea de 10 m, ea va atinge solul după $t = \sqrt{20/9,81} \approx 1,43\text{s}$, atingând viteza $v=gt \approx 14 \text{ m/s}$.

Dacă mișcarea rectilinie este **uniform decelerată**, atunci accelerația $a(t)=a$ este constantă, cu $a<0$ și rezultă formulele

$$v(t) = v_0 - |a| \cdot t, \quad s(t) = v_0 t - \frac{|a|t^2}{2} \text{ presupunând că } s(0)=0.$$

Exemplu: Aruncarea unui obiect pe verticală în sus, la momentul $t=0$ și cu viteza inițială $v_0>0$ este o mișcare uniform decelerată, cu $a=-g$; obiectul se oprește dacă $v(t)=0$, adică după timpul $t=v_0/g$, atingând altitudinea (înălțimea):

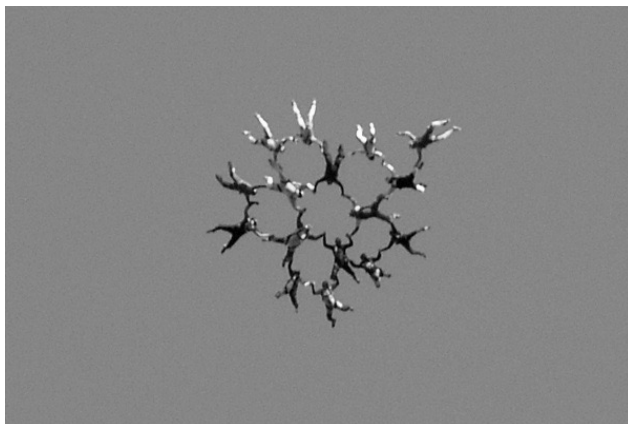
$$s(t) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Dacă aruncăm de jos o minge de tenis cu viteza inițială $v_0=8 \text{ m/s}$, ea va ajunge la înălțimea maximă după timpul

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{8}{9,81} \approx 0,81 \text{ secunde, atingând înălțimea}$$

$$s = (64 / 2 \cdot 9,81) \approx 3,26 \text{ m.}$$

Notă: Reținem că fenomenele de cădere liberă/aruncare în sus (în vid) de obiecte cu dimensiuni „necosmice” sunt descrise prin mișcări rectilinii uniform accelerate/decelerate.



Căderea liberă

1.2. Mișcarea curbilinie 2D

Considerăm acum mișcarea unei particule (\equiv mobil) pe o curbă plană (C), numită și **mișcare curbilinie**. Considerăm un reper ortonormal xOy , cu versorii \vec{i}, \vec{j} ai axelor. Presupunem că la fiecare moment t , mobilul se află în punctul $M(x(t), y(t))$. Vectorul său de poziție este $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. Presupunem curba (C) netedă, adică este continuă și are tangentă în fiecare punct, fără autointersecții (figura 1.1).

Relațiile $x=x(t)$, $y=y(t)$ se numesc **ecuațiile parametrice** ale curbei (C). Fixăm un moment t_0 și fie $M_0 \in (C)$ poziția mobilului la acest moment. Așadar, $M_0(x(t_0), y(t_0))$, deci:

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$$

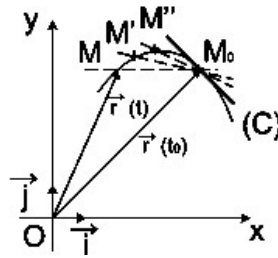


Fig. 1.1

Pentru $t \neq t_0$, rezultă:

$$\frac{1}{t-t_0} \overrightarrow{M_0M} = \frac{1}{t-t_0} (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \vec{i} + \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \vec{j}$$

Pentru $t \rightarrow t_0$, rezultă $M \rightarrow M_0$ și coarda M_0M tinde spre tangenta la (C) în punctul M_0 . La limită, rezultă că $\forall t_0$, $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$ și acest vector este colinar cu tangenta în M_0 la curba (C).

Cum t_0 este arbitrar, rezultă că $\forall t$, $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ și acest vector are direcția tangentei la curba (C) în punctul curent M . Curba (C) se mai numește **traiectoria** mobilului.

Se studiază și traiectorii spațiale, pe curbe 3D, raportate la repere ortonormale $Oxyz$, ceea ce necesită elemente de geometrie analitică în spațiu și vectori 3D.

Exemplu: Considerăm curba (C): $x=2t$, $y=t^2+1$ și $t_0=1$. Atunci $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2+1)\vec{j}$, $\vec{r}'(t) = 2\vec{i} + 2t\vec{j}$, $\vec{r}'(t_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

Exemple de traiectorii: urma unei pietre, drumul unui schior, al unui țăntar etc.

Aplicație: mișcarea circulară

Fie (C) un cerc (\equiv circumferință) de centru O și rază R . Îi atașăm un reper ortonormal xOy (figura 1.2). Fie A poziția inițială, la momentul $t=0$, a unui mobil aflat pe (C) .

La orice alt moment t , mobilul se află într-un punct $M \in (C)$; fie $\alpha(t) = \text{măs } \sphericalangle AOM$. Mișcarea lui M se numește **circulară uniformă**, dacă există o constantă pozitivă ω (numită **viteza unghiulară** a mobilului M), astfel încât $\alpha(t) = \omega t$.

Drumul parcurs s de la A la M este lungimea arcului de cerc \widehat{AM} , adică $s = R\alpha = R\omega t$ (cu α măsurat în radiani).

Punctul M are coordonatele $x = OM' = R \cos \alpha = R \cos \omega t$ și $y = M'B = R \sin \omega t$ și vectorul său de poziție este $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = R \cos \omega t \vec{i} + R \sin \omega t \vec{j}$.

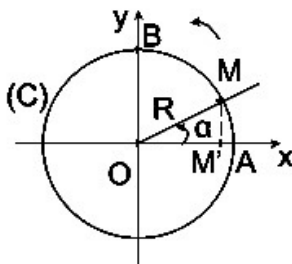


Fig. 1.2

Vectorul-viteză este $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = -\omega R \sin \omega t \vec{i} + \omega R \cos \omega t \vec{j}$; mărimea lui se numește **viteza liniară** a mobilului:

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{R^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + R^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)} = R\omega.$$

Vectorul-accelerație este:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = -\omega^2 R \cos(\omega t) \vec{i} - \omega^2 R \sin(\omega t) \vec{j} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

și **acclerația** mobilului ca mărime scalară este:

$$a(t) = \|\vec{a}(t)\| = R\omega^2 = R\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{v^2}{R}$$

Reținem că vectorii–viteză și accelerație sunt variabili (depinzând de t), dar mărimile lor sunt constante:

$$v = R\omega, a = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \quad (10)$$

Deoarece $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$ și $\vec{r}'(t)$ are direcția tangentei în M la cerc, rezultă că $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$, deci vectorul–viteză este perpendicular pe vectorul de poziție, la orice moment t . Apoi $\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$, deci vectorul–acclerație $\vec{a}(t)$ este coliniar cu $\vec{r}(t)$, adică este orientat pe rază la punctul de contact, spre centru. De aceea, accelerația se mai numește **centripetă** (radială sau normală);

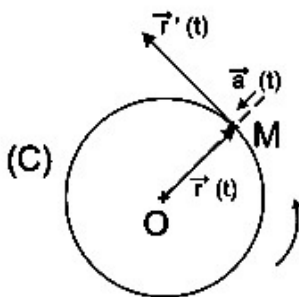


Fig. 1.3

Notă: În limba engleză, vectorul–viteză se numește „velocity”, iar mărimea lui (adică viteza scalară) se numește „speed”. La noi nu se face această distincție lingvistică.

Menționăm de asemenea **vectorul-viteză unghiulară** $\vec{\omega}$, astfel încât $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (produs vectorial). Acest vector este perpendicular pe \vec{r} și \vec{v} , fiind orientat după regula burghiului (figura 1.4).

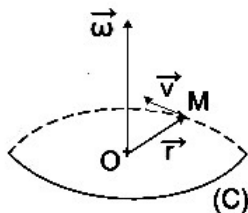


Fig. 1.4

Exemplu: Fie un cerc de rază R . Presupunem că în mișcare circulară uniformă, un mobil se deplasează astfel încât vectorul său de poziție își modifică direcția cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ în 3s.

Care sunt viteza liniară și accelerația mobilului ?

Răspuns: $\omega = \frac{\pi}{6}$ rad/sec; deci conform (10), $v = \frac{\pi R}{6}$ și

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{\pi^2 R}{36}.$$

§ 2. DINAMICĂ

Cinematica studiază mișcările corpurilor, fără să ia în considerație cauzele; **forțele** sunt cele care reprezintă cauzele modificării vitezelor corpurilor! Dinamica are în vedere tot felul de mișcări întâlnite în natură și importante, studiate de profesioniști sau imaginate de semenii pricepuți ori închipuiți; mișcările au loc sub acțiunea diverselor forțe, aceste forțe având

punct de aplicație, direcție, sens, mărime, într-un singur cuvânt, fiind vectori.

2.1. Legile lui Newton

Pe la 1600, Galilei a arătat că starea naturală a corpurilor este mișcarea rectilinie uniformă sau repausul (\equiv lipsa mișcării). **Inerția** corpurilor este tocmai proprietatea lor de a rămâne în această stare naturală, proprietate exprimată prin **masă**, măsurată în kg (sau alte unități); un corp având o masă mai mare, se urnește mai greu și inerția unui corp depinde numai de masa lui, deci de cantitatea de substanță conținută. Tot Galilei a sugerat că toate corpurile interacționează între ele prin forțe; însă marele fizician și matematician englez Isaac Newton a fost cel care a stabilit în 1687, într-un mod sistematic și coerent, cele trei legi fundamentale ale dinamicii:

LEGEA I „Un corp își menține starea de mișcare rectilinie uniformă sau de repaus, atâta timp cât nu intervine asupra lui o forță care să-i modifice starea”.

Comentariu: Legea I este numită **principiul inerției** Galilei–Newton. Reperele 3D (\equiv sisteme de referință) unde are loc acest principiu se numesc **inerțiale**. Dacă un reper se deplasează rectiliniu uniform în raport cu un reper inerțial, acesta este asimilat și el cu unul inerțial.

Exemplu: Un reper legat de Pământ este inerțial pentru corpurile din jurul nostru.

LEGEA a II-a „Accelerația unui corp este proporțională cu mărimea forței aplicate asupra corpului și este îndreptată în direcția și sensul forței”.

Comentariu: Cu notații transparente, $F=ma$ sau vectorial $\vec{F} = m\vec{a}$, unde m este masa corpului. Dacă asupra unui corp acționează mai multe forțe, având rezultanta (\equiv suma) \vec{R} , atunci $\vec{R} = m\vec{a}$. Timp de 2000 de ani, de la Aristotel citire, s-a crezut că forța este proporțională cu viteza și nu cu accelerația. Această eroare a fost îndreptată de Newton.

Forțele se măsoară în N (\equiv newton); conform legii a II-a, 1N este mărimea forței care accelerează o masă de 1kg cu 1m/s^2 .



(Forțe în acțiune)

Exemplu: Un jucător de hochei pe gheață lovește cu crosă un puc cu masa $m=0,2$ kg. Pucul pornește din repaus și atinge viteza de 15 m/s pe $0,5 \text{ m}$. Ce forță a exercitat jucătorul asupra pucului?

Răspuns: Conform formulei (8) pentru $v_0=0$ și $s_0=0$, avem $v=at$ și $s = \frac{at^2}{2}$, deci $v^2=2as$.

$$\text{Atunci } a = \frac{v^2}{2s} = \frac{15^2}{2 \cdot 0,5} = 225 \text{ m/s}^2, \text{ și forța cerută este}$$

$$F=ma=0,2 \times 225=45 \text{ N.}$$

LEGEA a III-a „Oricărei acțiuni (\equiv forțe) îi corespunde o reacțiune (\equiv o forță opusă), egală în mărime și cu același suport (direcție), dar îndreptată în sens contrar”.

Legea a III-a este numită sugestiv **principiul „acțio–reacțio”**.

Exemplu: Un corp aflat pe sol apasă cu greutatea sa \vec{G} ; solul îi răspunde cu reacțiunea $\vec{N} = -\vec{G}$.

Aceste legi (\equiv principii) nu se demonstrează, dar trebuie înțelese și aplicate în mod corespunzător; ele au fost confirmate pe deplin în practica umană.

Notă: Orice corp are o **masă**, unitatea de măsură fiind kilogramul; există un etalon pentru 1 kg, stabilit convențional și acceptat de întreaga comunitate științifică. De exemplu, s-a dovedit în timp că masa moleculei de hidrogen este $m_H=33 \times 10^{-25}$ kg și masa moleculei de oxigen este $16 m_H$, iar a moleculei de apă $9 m_H$. Pe de altă parte, 1t (\equiv 1000 kg) de gheață ocupă un volum de $1,1 \text{ m}^3$, în timp ce 1t de fier ocupă $0,13 \text{ m}^3$. Așadar, 1t dintr-o substanță are volume diferite, în funcție de substanță.

Densitatea unei substanțe este raportul $\rho = \frac{m}{V}$, măsurat în kg/m^3 . Evident, $1 \text{ kg/dm}^3 \equiv 1 \text{ t/m}^3 \equiv 1 \text{ g/cm}^3$. De exemplu,

$$\rho_{Fe} \equiv \frac{1}{0,13} \approx 7,8 \text{ t/m}^3 \text{ și } \rho_{gheata} \equiv \frac{1}{1,1} \approx 0,9 \text{ t/m}^3. \text{ Iar } \rho_{\text{titei}} \approx 0,71 \text{ t/m}^3$$

și $\rho_{aer} \approx 1,29 \text{ kg/m}^3$.

2.2. Tipuri de forțe

Așa cum am mai spus, forțele pun corpurile în mișcare, modificându-le viteza și direcția mișcării. Forțele se măsoară cu ajutorul unor dispozitive numite **dinamometre**.

Interacțiunile dintre corpuri pot avea loc prin **contact direct**, ca în cazul forțelor de frecare, forțelor elastice, reacțiunilor sau forțelor de tracțiune ori împingere, dar și **de la distanță**, prin acțiunea nevăzută a unor câmpuri (gravitaționale, electrice, magnetice sau nucleare); ideea de câmp a apărut la Faraday după 1830.

Dar, s-o luăm sistematic ...

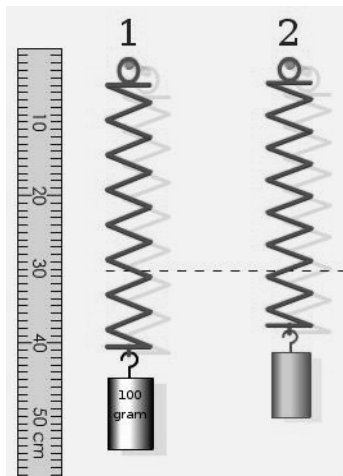
a) **Forțe elastice:** Pentru un corp practic 1-dimensional, bare subțiri, fire, sârme, resorturi etc, orice alungire $\overline{\Delta l}$ declanșează o forță de sens opus, egală cu

$$\overline{F}_e = -k\overline{\Delta l} \quad (11)$$

unde $k > 0$ este o constantă depinzând de material (numită **constanta de elasticitate** sau de rigiditate). Așa cum am reamintit, forțele se măsoară în N (\equiv newtoni), deci constanta k se exprimă dimensional în N/m.

Legat de fire, sârme sau resorturi, forțele elastice interne se mai numesc **tensiuni** și ele sunt orientate dinspre

„tractor” (\equiv obiectul care le întinde), raportul $\sigma = \frac{T}{S}$ dintre tensiune și aria secțiunii transversale se numește **efort unitar**.



Dacă l_0 este lungimea inițială a firului (sârmei sau resortului) și Δl =alungirea, atunci are loc **legea lui Hooke**, $\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0}$, unde $E > 0$ este o constantă depinzând de material, numită **modulul lui Young**. Modulul lui Young, ca și σ , se măsoară în N/m². Conform legii lui Hooke, $\frac{T}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$, deci $T = ES \frac{\Delta l}{l_0}$ și notând $k = \frac{ES}{l_0}$, rezultă formula $T = k \Delta l$, adică regăsim (11).

Notă: S-a constatat experimental că valoarea constantei E este pentru aluminiu, $E = 0,7 \times 10^{11}$, pentru cupru avem

$E=1,1 \times 10^{11}$, fier $E=1,9 \times 10^{11}$, sticlă $E=0,5 \times 10^{11}$ și pentru cauciuc $E=10^6 \text{ N/m}^2$.

Exemple:

1) Aplicând o forță $F_e=5 \text{ N}$ unui resort cu $k=25 \text{ N/m}$, alungirea acestuia va fi, conform (11), $\Delta l=0,2 \text{ m}$; dacă se dorește o alungire de 50 cm , este necesară forța $F_e=25 \cdot 0,5=12,5 \text{ N}$.

2) Un extensor din cauciuc are aria secțiunii $S=1,5 \text{ cm}^2$. Cu ce forță se poate dubla lungimea lui ?

Răspuns: Lungimea inițială este l_0 și cea finală $2l_0$ deci $\Delta l = 2l_0 - l_0 = l_0$. Apoi, $S=1,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ și $E=10^6 \text{ N/m}^2$ (în sistemul SI de unități). Atunci $k=ES/l_0$ și conform (11)

$$F_e = k\Delta l = \frac{150}{l_0} l_0 = 150 \text{ N} .$$

b) Forțe de frecare

Forțele de frecare sunt forțe de contact; ele pot fi statice, de alunecare (pe plane orizontale sau înclinate) sau de rostogolire și depind de suprafețele aflate în contact. Ne gândim la obiecte aflate pe sol sau pe un deal. Forța de frecare **de alunecare** F_{fr} este direct proporțională cu forța N de apăsare normală (\equiv perpendiculară) pe suprafața de contact:

$$F_{fr} = k \cdot N \tag{12}$$

unde k este un scalar numit **coeficient de frecare** (determinabil experimental). În viața cotidiană, frecarea este inerentă și nu poate fi eliminată, ci cel mult diminuată. Ea are avantaje și

dezavantaje. Astfel, frecarea permite frânarea mașinilor; apoi, ea ne ajută să pășim (altfel alunecăm nedefinit).

Dar tot frecarea conduce la uzura diverselor componente în mișcare sau la supraîncălzire, ceea ce impune folosirea de rulmenți, lubrifianți etc.

c) Greutatea unui corp ca forță de atracție

Newton a descoperit, în urmă cu peste 300 de ani, următoarea **LEGE A ATRACȚIEI UNIVERSALE**, care îi poartă numele:

“Pentru orice două corpuri din univers (planete, obiecte, persoane, molecule etc.) având masele m_1 și m_2 , aflate la distanță r , există o forță de atracție reciprocă:

$$F_{12} = K \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = F_{21}. \quad (13)$$

Așadar, forța de atracție este proporțională cu fiecare din mase și invers proporțională cu pătratul distanței;

K este o constantă reală universală, având valoarea $K \cong 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ (Unii autori folosesc notația G sau γ pentru K în formula (13); ea se numește **constantă gravitațională** a lui Newton).

Exemplu: Determinăm forța F de atracție dintre două corpuri având masa de 100 kg, aflate la distanța $r=1 \text{ mm}$.

Lucrăm în sistemul SI de unități, $m_1=m_2=100 \text{ kg}$ și $r=10^{-3} \text{ m}$,

$$\text{deci } F = 6,67 \times 10^{-11} \frac{10^2 \times 10^2}{10^{-6}} \cong 0,67 \text{ N}.$$

Notă: Nu putem da demonstrația formulei (13). Inițial, Newton a dedus-o în cazul planetelor sistemului solar, cu metode de Analiză matematică și folosind legile K_1 – K_3 ale lui Kepler:

Legea K_1 “Orice planetă P se mișcă pe o traiectorie-elipsă, având Soarele S într-unul din focare; așa cum există o forță de atracție \vec{F} orientată spre S , tot astfel există și reacția $-\vec{F}$, cu care Pământul atrage Soarele.” (figura 1.5)

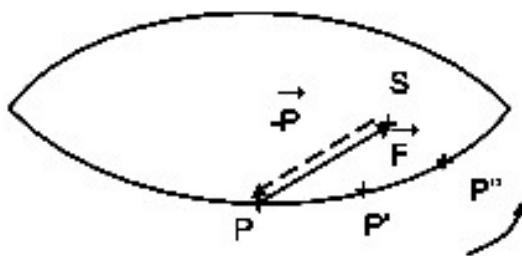


Fig. 1.5

Legea K_2 “Raza vectorie SP mătură arii egale în intervale de timp egale.”

Legea K_3 “Pentru oricare din cele 10 planete ale sistemului nostru solar, pătratul timpului de revoluție, împărțit la cubul semiaxei mari a elipsei respective este același.”

Nu dăm detalii asupra acestor legi.

Ceva mai târziu, același Newton a emis ipoteza revoluționară a extinderii legii, trecând de la planete la orice pereche de corpuri din Univers—sateliți, comete, meteoriți, stele, rachete, persoane, animale, arbori, atomi sau molecule etc. Acest fapt a asigurat caracterul universal al legii. În Fizică și în

practica industrială, forța gravitațională coexistă cu alte forțe – electrice, magnetice, nucleare etc.

Definiție: **Greutatea** \vec{G} a unui corp de pe Pământ este forța cu care corpul este atras spre centrul Pământului (fig. 1.6).

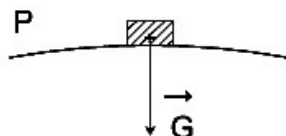


Fig. 1.6

Conform (13), $G = K \cdot \frac{mm_P}{r^2}$, unde m este masa corpului,

m_P =masa Pământului $\cong 6 \times 10^{24}$ kg și R =raza Pământului $\cong 6,38 \times 10^6$ m. Notăm:

$$g = K \cdot \frac{m_P}{R^2} \cong 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{6 \times 10^{24}}{(6,38 \times 10^6)^2} = \frac{6,67 \times 60}{6,38^2} \cong \mathbf{9,81 \text{ m/s}^2};$$

aceasta este valoarea **acceleerației gravitației**.

Așadar, $G=mg$ (măsurată în N) și vectorial

$$\vec{G} = m\vec{g} \quad (14)$$

Exemple:

1) Presupunem că greutatea unei persoane este de 700 N. Atunci masa lui este $m = \frac{700}{9,81} \cong 71,4$ kg. Trebuie observat că forța de

1N este aproximativ egală cu atracția gravitațională asupra unei mase de 100 g.

2) Un parașutist cu greutatea \vec{G} atinge solul cu genunchii îndoiți; el se imobilizează având o decelare dirijată în sus de mărime $3g$. Să se determine mărimea forței exercitate de sol în timpul aterizării.

Răspuns: Forțele care acționează asupra parașutistului sunt \vec{G} și reacția \vec{N} a solului. Dar $G=mg$, $a=3g$ deci $N - G = ma = \frac{G}{g} \cdot 3g$, de unde $N=4G$.

3) Un corp cu greutatea $G=40$ N se află pe o suprafață plană orizontală. Dacă corpului i se aplică o forță orizontală $T=25$ N, acesta rămâne pe loc; ce se poate spune despre forța de frecare ?

Dar dacă se aplică forța $T=36$ N, blocul începe să se deplaseze; care este coeficientul de frecare ?

Răspuns: $F_f=25$ N și se opune mișcării. Așadar, forța maximă $F_{f\max}=36$ N și reacția suprafeței este 40 N deci $36=k \cdot 40$ și $k = \frac{36}{40} \cong 0,9$.

Notă: De fapt, accelerația gravitațională g depinde de altitudine; dacă un corp se află la altitudinea h față de Pământ, atunci $g_h = K \frac{m_P}{(R+h)^2}$. La sol, $h = 0$ deci $g_0 = K \frac{m_P}{R^2}$ și ca atare,

$$g_h = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2. \quad (15)$$

Ne propunem, de exemplu, să aflăm h astfel încât $g_h = \frac{1}{2} g_0$ (adică accelerația gravitațională să scadă la jumătate).

$$\text{A ș a d a r , } \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \frac{1}{2} , \text{ d e c i } \frac{R}{R+h} = \frac{\sqrt{2}}{2} , \text{ ș i}$$

$$h = R(\sqrt{2} - 1) \cong 2616 \text{ km.}$$

Masa unui corp este o proprietate intrinsecă, fiind aceeași pe Pământ, pe Lună sau pe planeta Marte. Dar greutatea unui corp, nu! Greutatea depinde de loc, deoarece g nu este o constantă.

Aplicații:

În cele ce urmează, vom neglija rezistența aerului.

1) Fie un resort elastic fixat, de care este suspendat un corp având masa m (figura 1.7). Care va fi alungirea resortului?

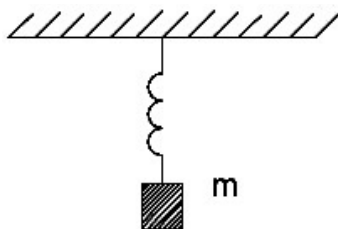


Fig. 1.7

Răspuns: Greutatea este $\vec{G} = m\vec{g}$ și conform legii a III-a a lui Newton, apare o forță elastică exercitată de resort asupra corpului, $\vec{F}_e = -\vec{G}$. Cunoscând constanta k de elasticitate a resortului, din relația scalară $k\Delta l = mg$, se determină Δl .

2) Se consideră un scripete fix ca în figura 1.8, cu masele m_1 , m_2 cunoscute, cu $m_1 < m_2$. Să se determine accelerația sistemului și **tensiunea** T a firului. Firul este inextensibil, ca atare în orice loc se face o tăietură, tensiunea în fir este aceeași. (figura 1.8)

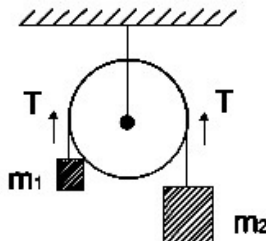


Fig. 1.8

Soluție: Forțele care acționează sunt greutatea celor două mase și tensiunea în fir. Folosind legea a II-a, rezultă relațiile $m_2g - T = m_2a$ și $T - m_1g = m_1a$, unde a este accelerația sistemului.

Adunând cele două relații, rezultă $(m_2 - m_1)g = (m_2 + m_1)a$, de

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot g,$$

iar

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

3) Un ascensor gol are masa $m=800$ kg și accelerația $a=2$ m/s² la urcare. Care este tensiunea T în cablul ascensorului? Dar dacă are aceeași accelerație la coborâre?

Răspuns: Forțele care acționează asupra ascensorului sunt greutatea \vec{G} și tensiunea \vec{T} . În primul caz, $T - mg = ma$, deci $T = m(g + a) = 800 \times (9,8 + 2) = 9440$ N și, în cazul secund, $T - mg = -ma$, deci $T = 800 \times (9,8 - 2) = 6240$ N.

4) Fie un penar de masă m pe un plan înclinat, cu unghiul $\alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ (figura 1.9). Să se determine accelerația mișcării penarului, cunoscând coeficientul k de frecare pe plan.

Soluție: Forțele care acționează asupra penarului sunt: greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$, forța de frecare (care are sensul opus mișcării) și reacțiunea planului.

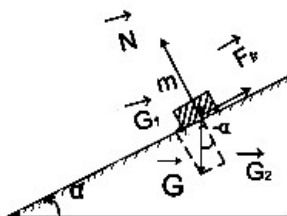


Fig. 1.9

Se descompune vectorul $\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$ pe direcția planului și pe direcția normalei; folosind faptul că unghiurile ascuțite cu laturi perpendiculare sunt congruente $G_1 = G \sin \alpha = mg \sin \alpha$ și $G_2 = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$. Conform legii a II-a, $\vec{G}_1 - \vec{F}_{fr} = m\vec{a}$, unde \vec{a} este accelerația căutată. Ținând cont de faptul că $F_{fr} = kN = kG_2$, rezultă relația: $mg \sin \alpha - kmg \cos \alpha = ma$, deci $a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$. Masa penarului nu a contat!

Notă: Condiția ca penarul să se afle în repaus sau în mișcare uniformă este $a=0$. În acest caz, rezultă că $\sin \alpha - k \cos \alpha = 0$ deci $\tan \alpha = k$. Coeficientul k se determină experimental crescând unghiul de înclinare începând cu $\alpha = 0$ și observând pentru ce valoare a lui α , penarul începe să coboare pe plan.

5) Se cunosc masa Pământului, $m_P \approx 5,98 \times 10^{24}$ kg și masa Lunii, $m_L \approx 7,36 \times 10^{22}$ kg. Fie d distanța de la Pământ la Lună, presupusă constantă. Să se determine la ce distanță de Lună, un corp este atras cu aceeași forță atât de Pământ cât și de Lună.

Soluție: Fie x distanța căutată. La scară cosmică, privim Pământul și Luna ca două bile și d este distanța dintre centrele lor (figura 1.10).

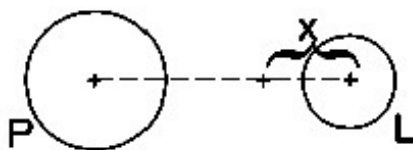


Fig. 1.10

Notând cu m masa corpului (care în final nu va conta!) și aplicând legea (13) a atracției universale, rezultă

$$K \frac{m \cdot m_P}{(d-x)^2} = K \frac{m \cdot m_L}{x^2}, \text{ deci } \frac{(d-x)^2}{x^2} = \frac{m_P}{m_L} = \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{7,36 \cdot 10^{22}} \approx 81,25$$

$$\text{atunci } \frac{d-x}{x} = 9,01 \text{ și } x \approx \frac{d}{10}.$$

2.3. Prima viteză cosmică

Neglijând atmosfera terestră, viteza minimă care trebuie imprimată orizontal unei rachete de la altitudinea h , astfel încât aceasta să se plaseze pe o orbită în jurul Pământului, este numită **prima viteză cosmică**, notată v_I . Pentru evadare din câmpul gravitațional al Pământului trebuie imprimată cea de a doua viteză cosmică v_{II} .

Reamintim că accelerația centripetă a unui mobil aflat în mișcare circulară uniformă este $a = \frac{v^2}{R}$ (conform formulei (10)).

Greutatea rachetei de masă m este $m \cdot g_h$ și aceasta este egală cu forța centripetă $m \cdot \frac{v_1^2}{R+h}$. Așadar, $g_h = \frac{v_1^2}{R+h}$, deci conform (15), $v_I^2 = g_h(R+h) = g_0 \frac{R^2}{R+h}$ și $v_I = R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$.

Considerând că h este neglijabil în raport cu R , rezultă $v_I = \sqrt{Rg_0} = \sqrt{6380 \times 9,81 \times 10^{-3}} \cong 7,9$ km/s.

Deoarece $g_0 = K \frac{m_P}{R^2}$, rezultă totodată că $v_I = (K \frac{m_P}{R})^{1/2}$.

Notă: Se poate arăta că $v_{II} = v_I \cdot \sqrt{2} \cong 11,2$ km/s. Există și o viteză $v_{III} \cong 42$ km/s, necesară pentru a evada din câmpul gravitațional al Soarelui și a explora alte sisteme solare. Iar pentru părăsirea Galaxiei noastre, se impune o viteză de peste 290 km/s.

2.4. Presiunea

Diverse experimente cotidiene au condus la noțiunea de presiune. Știm că pe zăpada moale se merge mai greu pe jos decât cu schiurile; deși greutatea este aceeași, contează suprafața de contact cu zăpada! De asemenea, cuiele intră mai ușor într-o scândură, decât niturile.

Acțiunea unei forțe \vec{F} depinde și de aria S a suprafeței pe care \vec{F} este normală (\equiv perpendiculară) (figura 1.11).

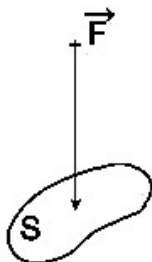


Fig. 1.11

Presiunea forței \vec{F} pe suprafața respectivă este scalarul $p = \frac{F}{S}$ și se măsoară în N/m^2 ; $1 \text{ N/m}^2 \equiv 1 \text{ Pa}$ (de la numele matematicianului și filozofului francez Pascal). Presiunea poate fi considerată ca vector: $\vec{p} = \frac{1}{S} \vec{F}$.

Exemple:

1) Un copil cu masa $m=40 \text{ kg}$ apasă pe o suprafață având aria $S=200 \text{ cm}^2$. Presiunea exercitată este $p = \frac{mg}{S} = \frac{40 \times 9,81}{200 \times 10^{-4}} = 196200 \text{ Pa}$.

2) Un tanc cu șenilă are masa de 8 t și aria celor două șenile de 2m^2 . Presiunea exercitată de tanc asupra solului este $p=39240\text{Pa}$. Iar pentru o pioneză care intră într-un perete de lemn cu forța de 40 N și are aria vârfului de $0,1 \text{ mm}^2$, presiunea pionezei este $p_1 = \frac{40}{0,1 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^8 \text{ Pa}$; așadar, $p_1 \gg p$ (mult mai mare !).

Notă: Inginerii constructori realizează fundații mai întinse, pentru ca presiunea asupra solului să scadă. Anvelopele de camioane și avioane sunt mai late decât la automobile tocmai cu scopul reducerii presiunii asupra solului. Păsările și animalele au dinți, gheare, ciocuri, spini ascuțiți etc. tocmai pentru a putea exercita o presiune mai mare la lovire sau la străpungere.

§ 3. LUCRU MECANIC, PUTERE, ENERGIE

3.1. Lucru mecanic

Un tren se deplasează prin acțiunea forței de tracțiune a locomotivei; similar, un automobil utilizează la mers forța de tracțiune datorată motorului. În aceste cazuri, se face lucru mecanic. Același lucru se întâmplă dacă ridicăm un obiect prin forța musculară sau dacă împingem sau deplasăm un obiect în cameră.

Forța de greutate a unui dulap nu face lucru mecanic, la fel greutatea unui obiect atârnat. De asemenea, un corp care se mișcă datorită inerției nu face lucru mecanic. Facem de asemenea distincția între lucru mecanic și lucrări mentale sau fiziologice.

Prin definiție, **lucrul mecanic** (\equiv lucrul, pe scurt) al unei forțe \vec{F} în lungul unui vector–distanță \vec{d} este produsul scalar

$$\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos \alpha \quad (16)$$

unde $\alpha = \text{măs} \angle(\vec{F}, \vec{d})$; (figura 1.12). Dacă α este obtuz, lucrul este un scalar negativ.

Dacă $\alpha=0$, adică forța \vec{F} are punctul de aplicație deplasat pe distanța d , în același sens, atunci $\mathcal{L} = F \cdot d$ („forța \times deplasarea”).

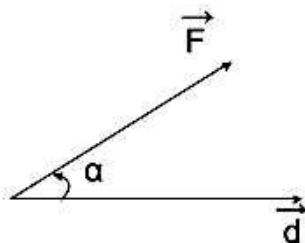


Fig. 1.12

Lucrul se măsoară în Jouli [J]. 1 J=1 Nm este lucrul efectuat de o forță de 1 N având punctul de aplicație deplasat cu 1 m. Dacă forța \vec{F} are mărimea constantă F și acționează în lungul unui interval $[a,b]$, atunci $\mathcal{L} = F \cdot (b-a)$, adică este aria dreptunghiului hașurat din figura 1.13.

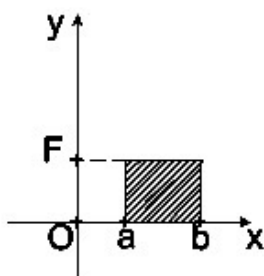


Fig. 1.13

Dar dacă \vec{F} este o forță variabilă, cu mărimea $F(x)$ și punctul de aplicație x , se poate arăta că lucrul lui F în lungul intervalului $[a,b]$ este numeric egal cu aria trapezului curbiliniu hașurat, mărginit de curba $y=F(x)$, de axa Ox și paralelele duse la axa Oy prin punctele $x=a$ și $x=b$ (figura 1.14). Așadar,

$$\mathcal{L} = \int_a^b F(x) dx . \quad (17)$$

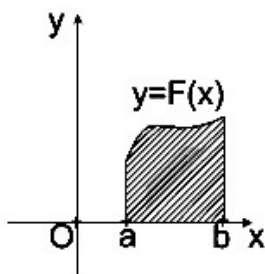


Fig. 1.14

Exemple:

- 1) Lucrul efectuat prin ridicarea unei mase m la înălțimea h este $\mathcal{L} = G \cdot h = mgh$. Dar lucrul greutatei în raport cu vectorul \vec{h} orientat în sus este $\mathcal{L} = \vec{G} \cdot \vec{h} = mgh \cos 180^\circ = -mgh$.
- 2) Un tractor trage un plug cu forța $F=6000\text{N}$ pe distanța $d=50\text{m}$. Lucrul efectuat este $\mathcal{L} = F \cdot d = 3 \times 10^5 \text{ J}$.
- 3) Dacă o presă hidraulică ridică 10 t la 80 cm înălțime, lucrul mecanic făcut de acea presă este $\mathcal{L} = 10 \times 10^3 \times 9,81 \times 0,8 \cong 78,5 \text{ kJ}$.
- 4) Lucrul (mecanic) al unei forțe elastice variabile $F_e(x)=3x$ pentru $x \in [a, b]$ este, conform (17),

$$\mathcal{L} = \int_a^b F_e(x) dx = \int_a^b 3x dx = 3 \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{3}{2} (b^2 - a^2).$$

- 5) Pe un plan înclinat (cu α față de orizontală), un corp (punctual) cu masa m coboară din poziția 1 în poziția 2; (figura

1.15). Determinăm lucrul forței de frecare pe distanța d dintre cele două poziții.

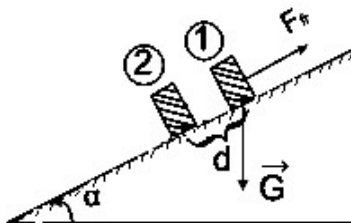


Fig. 1.15

Soluție: Forța de frecare se opune mișcării; componenta normală la plan a greutății \vec{G} este $N = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$ și $F_{fr} = kN$ (k =coeficientul de frecare pe plan). Atunci lucrul cerut este $\mathcal{L} = \vec{F}_r \cdot \vec{d} = kmg \cdot \cos \alpha \cdot d \cdot \cos 180^\circ = -kmgd \cdot \cos \alpha$.

3.2. Putere

Același lucru (mecanic) poate fi făcut de două mașini sau de două persoane în timpi diferiți. Astfel, o macara ridică 10 t în 4 minute, iar omul, în 4 zile sau ... deloc!; iar o pereche de boi ară 1 ha în 6 ore, iar un tractor în 30 minute.

Un motor poate face un lucru într-un interval de timp mai scurt față de alt motor; se spune că primul motor are putere mai mare. Toate acestea sugerează următoarea noțiune.

Definiție: **Puterea** unei forțe care produce lucrul $\mathcal{L} \geq 0$ pe o durată de timp Δt este:

$$P = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} \text{ („lucrul împărțit la durata acțiunii acelei forțe”)} \quad (18)$$

Unitatea de măsură a puterii în sistemul SI este Watt-ul:
 $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ (lucrul de 1 J efectuat într-o secundă).

Exemple:

1) 1 CP („cal putere”) este, prin convenție, puterea de a ridica 75kg la 1m înălțime în 1s.

$$\text{Deoarece } P = \frac{mgh}{\Delta t}, \text{ rezultă } 1 \text{ CP} = \frac{75 \times 9,81 \times 1}{1} \cong 736 \text{ W}.$$

2) Determinăm puterea generată de un flux de apă peste un baraj, având debitul de $100 \text{ m}^3/\text{minut}$ și înălțimea $h=30 \text{ m}$. Masa de apă pe minut este $m=\rho V=1000 \text{ kg/m}^3 \times 100 \text{ m}^3=10^5 \text{ kg}$; greutatea este $G=mg=9,81 \times 10^5 \text{ N}$, deci lucrul efectuat este $\mathcal{L} = Gh = 9,81 \times 10^5 \times 30 \cong 2,9 \times 10^7 \text{ J}$. Atunci puterea va fi

$$P = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} = \frac{2,9 \cdot 10^7}{60} \cong 0,48 \times 10^6 \text{ W} = 480 \text{ kW} = 0,48 \text{ MW}.$$

3) Dacă motorul unui ventilator de cameră are puterea de 30 W, ce lucru mecanic efectuează el în 15 minute ?

Răspuns: Conform formulei (18), rezultă $\mathcal{L} = P \cdot \Delta t$, deci $\mathcal{L} = 30 \times 600 = 18000 \text{ J} = 18 \text{ kJ}$.

4) Un conveier ridică într-o oră 20 m^3 nisip, la 5 m înălțime. Ce putere dezvoltă motorul conveierului dacă densitatea nisipului este $\rho=1200 \text{ kg/m}^3$?

Răspuns: Masa de nisip este $m=\rho V=20 \times 1200=24000 \text{ kg}$; lucrul efectuat va fi $\mathcal{L}=24000 \times 9,81 \times 5$ și puterea cerută este

$$P = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} = \frac{\mathcal{L}}{3600} \cong 327 \text{ W}.$$

Notă: Menționăm că motorul unui automobil mediu dezvoltă o putere de circa 60 kW, iar o locomotivă Diesel are puterea de 2000 kW.

Puterea medie a unei persoane este de 75 W.

3.3. Randament

Diversele dispozitive–mașini, utilaje, motoare etc. sunt adeseori analizate pentru eficiența lor. Se estimează raportul dintre lucrul util efectuat de acel dispozitiv \mathcal{L}_u și lucrul consumat \mathcal{L}_c . Raportul adimensional $\eta = \frac{\mathcal{L}_u}{\mathcal{L}_c}$ se numește

randamentul (\equiv eficiența) dispozitivului respectiv. Totdeauna $0 \leq \eta \leq 1$. Uneori se consideră termenul $\eta \cdot 100\%$ (randamentul în procente). Ca exemplificare, determinăm **randamentul unui plan înclinat**. În practică, planul înclinat este un dispozitiv utilizat pentru ridicarea la înălțime a diverselor obiecte. Fie un corp cu greutatea G , care trebuie ridicat la înălțimea h . Lucrul util este $\mathcal{L}_u = Gh$, iar lucrul consumat este lucrul forței de tracțiune pe lungimea l a planului (figura 1.16).

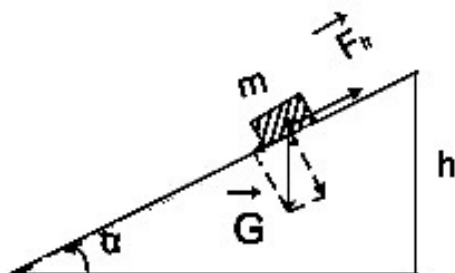


Fig. 1.16

Cu notații transparente, $F_{fr} = kN = kG \cos \alpha$ și rezultanta forțelor care trebuie învinse este $G \sin \alpha + kG \cos \alpha$. Așadar, $\mathcal{L}_c = (G \sin \alpha + kG \cos \alpha) \cdot l$. Randamentul cerut va fi

$$\eta = \frac{\mathcal{L}_u}{\mathcal{L}_c} = \frac{h}{l(\sin \alpha + k \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + k \cos \alpha} = \frac{1}{1 + k \cdot \operatorname{ctg} \alpha}$$

unde k este coeficientul de frecare pe plan; η crește o dată cu creșterea lui α de la 0 la $\frac{\pi}{2}$. De exemplu, dacă $\alpha = 30^\circ$ și

$$k = 0,15, \text{ atunci } \eta = \frac{1}{1 + 0,15 \cdot \sqrt{3}} \cong 0,8.$$

Exemplu: O încărcătură cu masa $m = 80 \text{ kg}$ este suspendată de brațul mai scurt al unei pârgii. Pentru a ridica încărcătura, se aplică brațului mai mare o forță de 200 N. Încărcătura este ridicată la înălțimea $h_1 = 10 \text{ cm}$ și punctul de aplicație al eforturilor este coborât la $h_2 = 50 \text{ cm}$.

A t u n c i : $\mathcal{L}_u = mgh_1 = 80 \times 9,81 \times 0,1 = 78,48 \text{ J}$ și $\mathcal{L}_c = 200 \times 0,5 = 100 \text{ J}$, deci $\eta = 0,78 \cong 78\%$.

3.4. Energie

În limbaj curent, se spune că un sistem fizic, chimic sau biologic „are energie” dacă el este capabil de acțiune și efectuează lucru mecanic. Nu precizăm termenul de sistem, care are o mare generalitate și se referă la mașini, motoare, utilaje, corpuri, persoane, reactoare nucleare etc.

Prin definiție, **energia** unui sistem este o mărime fizică exprimând capacitatea lui de a efectua lucru; energia este un scalar măsurat în Jouli. În cazul unui sistem mecanic, vorbim de energie mecanică; ulterior vom întâlni energie electrică, chimică, nucleară etc. Energia mecanică este de două tipuri: **cinetică**, notată E_c (\equiv determinată de mișcare, de translație, rotație sau vibrație) și **potențială**, notată E_p (\equiv determinată de pozițiile mutuale ale corpurilor). Un sistem poate avea unul din tipuri sau pe amândouă. **Energia totală** este suma $E=E_c+E_p$.

Energia cinetică a unui corp (particulă materială, obiect, moleculă etc.) având masa m și viteza v este scalarul

$$E_c = E_c(v) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (19)$$

Exemplu: Dacă viteza unui corp crește de două ori, atunci energia lui cinetică crește de patru ori.

Să presupunem că un corp de masă m este deplasat pe o axă de la punctul x_1 la punctul x_2 , uniform accelerat cu accelerația constantă a . Forța aplicată corpului este, conform legii a II-a a lui Newton, $F=ma$ și lucrul efectuat în lungul segmentului $[x_1, x_2]$ este $\mathcal{L} = F \cdot (x_2 - x_1) = max_2 - max_1$

Aplicând formulele (8) pentru mișcarea uniform accelerată fără viteză inițială, cu $v_0=0$, $s_0=0$, avem $v=at$ și $s = \frac{at^2}{2}$, deci $v^2 = a^2t^2 = a^2 \frac{2s}{a}$, adică $as = \frac{1}{2}v^2$. Notând cu v_1 , v_2 vitezele corpului la trecerea prin punctele x_1 , x_2 , rezultă

$ax_2 = \frac{1}{2}v_2^2$ și $ax_1 = \frac{1}{2}v_1^2$; apoi înlocuind în expresia anterioară a

lui \mathcal{L} , se obține $\mathcal{L} = m\frac{1}{2}v_2^2 - m\frac{1}{2}v_1^2$ și conform (19),

$$\mathcal{L} = E_c(v_2) - E_c(v_1) = E_c|_{v_1}^{v_2} \quad (20)$$

Așadar, \mathcal{L} este **variația energiei cinetice** între punctele x_1, x_2 . Acest rezultat poate fi generalizat sub forma unei teoreme fundamentale :

TEOREMA (de **variație a energiei cinetice**): „Variația energiei cinetice între două stări ale unui corp aflat în mișcare de translație este egală cu lucrul mecanic al rezultantei forțelor care acționează asupra aceluși corp între cele două stări”.

Nu dăm demonstrația pentru cazul general.

Exemplu: Un glonț cu masa $m=12$ g străbate o scândură de lemn cu grosimea $d=1,5$ cm. La impact, viteza glonțului a fost $v_1=200$ m/s și la ieșirea din scândură, $v_2=120$ m/s. Să se determine mărimea forței de frecare dintre glonț și scândură.

Soluție:

Conform teoremei anterioare, $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F_{fr} \cdot d$,

decî, $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10^{-3} (200^2 - 120^2) = F_{fr} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}$, de unde se obține

$$F_{fr} = 10240 \text{ N}.$$

Energia potențială, E_p , a unui corp este o energie „în așteptare”, spre deosebire de energia cinetică, „în acțiune”.

Energia potențială poate fi gravitațională sau elastică.

Exemple: 1) Un corp de masă m , aflat la înălțimea h deasupra solului, are energia potențială $E_p = Gh$ („lucrul mecanic al greutateii”), deci $E_p = mgh$. La sol, aceasta este nulă.

2) Un avion care zboară are energie cinetică, dar și potențială relativ la Pământ.

3) La trasul cu arcul, energia potențială a arcului trece în energia cinetică a săgeții. Similar, un automobil aflat în coborâre pe o pantă și frânat are energie potențială, care se transformă în energie cinetică, după ce frâna este eliberată. Iar energia potențială a acumulării de apă dintr-un bazin cu vana blocată devine cinetică după deschiderea vanei.

În diversele ei manifestări, energia se transformă dintr-o formă în alta; din energie chimică sau electrică se obține energie mecanică sau căldură (energie termică). De exemplu, dacă o macara încărcată efectuează un lucru de ridicare de 10 kJ, carburantul care a alimentat motorul macaralei i-a cedat energia necesară; ulterior, cei 10 kJ sunt regăsiți ca energie potențială a încărcăturii și din cauza diverselor frecări, o parte din energie se disipează în ambianță sub formă de căldură.

De fapt, orice consum de energie nu înseamnă anihilare, ci transformare dintr-o formă în alta!

Pe de altă parte, există mărimi variabile, a căror sumă este constantă; de exemplu, $u = \cos^2 t$ și $v = \sin^2 t$ variază cu t , dar suma $u + v = 1$ este constantă. Există apoi mărimi fizice care se **conservă în timp**, adică nu își modifică valoarea. De

exemplu, sarcina electrică și masa; de asemenea, vom vedea că energia totală sau impulsul au aceeași proprietate.

Să considerăm un corp de masă m , fixat la înălțimea H de sol. Singura energie a lui este cea potențială $E=E_p+0=mgH$. În orice poziție 1, energia totală E_1 a corpului este energia lui potențială mgh_1 plus energia sa cinetică $\frac{1}{2}mv^2$, unde v este viteza corpului aflat în cădere liberă deci $v^2=2gh_2$, (figura 1.17). Așadar, $E_1 = mgh_1 + \frac{1}{2}m \cdot 2g \cdot h_2 = mg(h_1 + h_2) = mgH = E$.

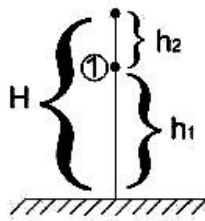


Fig. 1.17

Am demonstrat astfel că, **în orice poziție, energia totală este aceeași**. Dar rezultatul este mai general, anume are loc:

LEGEA CONSERVĂRII ENERGIEI: „Energia mecanică totală a unui sistem mecanic izolat (\equiv nesupus acțiunii unor forțe externe), aflat sub acțiunea unor forțe conservative, este constantă în timp”.

[O forță se numește **conservativă**, dacă pentru orice două stări s_i - inițială și s_f - finală, lucrul mecanic generat de ea depinde numai de s_i și s_f , nu și de stările intermediare].

De exemplu, forța gravitațională $\vec{G} \equiv \text{greutatea}$ și forțele elastice \vec{F}_e sunt conservative, dar forțele de frecare, nu.

Aplicații: 1) Din vârful unui deal cu înălțimea H , se rostogolește la vale, pe plan înclinat, o bilă de masă m . Neglijând frecarea, să se determine: a) Energia cinetică a bilei la jumătatea pantei; b) În ce punct, energia cinetică este egală cu dublul energiei potențiale; c) Viteza bilei la baza dealului.

Soluție: a) Conform legii conservării energiei,
 $mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{H}{2}$, deci $E_c = mgH - mg\frac{H}{2} = \frac{1}{2}mgH$.

b) Scriind că $E_c = 2E_p$, rezultă că energia totală este
 $E = E_c + E_p = 3E_p$, adică $mgH = 3mgh$, de unde $h = \frac{1}{3}H$.

c) Avem $mgH = 0 + \frac{mv^2}{2}$, de unde $v = \sqrt{2gH}$.

2) Fie un resort elastic cu masa neglijabilă, fixat la un capăt. La extremitatea resortului se află o bilă de masă m pe o masă orizontală (figura 1.18). Cu o forță de tracțiune, resortul poate fi extins până ce bila ajunge în poziția maximă $x=A$.

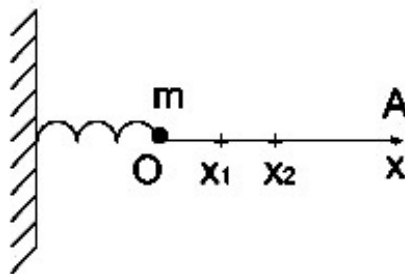


Fig. 1.18

Pentru orice $x \in [0, A]$, forța elastică având punctul de aplicație în x este $F_e = kx$ (k fiind coeficientul de elasticitate).

Energia potențială a resortului este tocmai lucrul mecanic al forței elastice, adică $E_p = \int_0^x F_e dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2} kx^2$.

După ce a fost extins și se dă drumul resortului, forța elastică îl readuce la starea inițială. Notând cu $v=v(x)$ viteza bilei în poziția x , legea conservării energiei totale arată că $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$, constant. Pentru $x=0$, resortul are viteza maximă v_0 și rezultă $\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = C$ și pentru $x=A$ (alungirea maximă), avem $v=0$ și se obține relația $0 + \frac{1}{2}kA^2 = C$, deci $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$; viteza maximă este $v_{\max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}$, unde A este alungirea maximă a resortului.

§ 4. IMPULS, CIOCNIRI

4.1. Conceptul de impuls

Acest paragraf este ceva mai dificil și trebuie reținut rezultatul principal – teorema de conservare a impulsului. Prin definiție, **impulsul unei forțe** de mărime F pe un interval de timp (\equiv durată) Δt este produsul $H = F\Delta t$; el se măsoară în Ns.

Impulsul unui corp de masă m și viteză v este produsul $p=mv$, numit și **moment** și măsurat în kgm/s.

Relațiile anterioare pot fi scrise și vectorial, astfel :

$$\vec{H} = \vec{F} \cdot \Delta t ; \vec{p} = m\vec{v} \quad (21)$$

Dacă forța \vec{F} este constantă, atunci din legea a II-a a lui Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) rezultă că accelerația \vec{a} este constantă, deci mișcarea este rectilinie și uniform accelerată; conform formulei (8), rezultă că viteza \vec{v} este la orice moment t , de forma $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$. Variația vitezei între orice două momente t_1, t_2 , este $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = (\vec{v}_0 + \vec{a}t_2) - (\vec{v}_0 + \vec{a}t_1) = \vec{a}(t_2 - t_1) = \vec{a}\Delta t$. Atunci $\vec{H} = \vec{F} \cdot \Delta t = m\vec{a}\Delta t = m(\vec{a}\Delta t) = m\Delta\vec{v} = \Delta(m\vec{v}) = \Delta\vec{p}$. Așadar, am demonstrat

TEOREMA VARIAȚIEI IMPULSULUI: „Impulsul forței este egal cu variația impulsului corpului”.

Această afirmație se poate generaliza.

Din relația $\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$, rezultă că $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ și aceasta are

loc și la limită (când $\Delta t \rightarrow 0$). Așadar,

$$\vec{F} = \vec{p}'(t) \quad (22)$$

adică forța este tocmai derivata impulsului; în limbaj fizic, forța este egală cu viteza de variație a impulsului punctului căruia i se aplică.

Notă: Dacă m este constantă, ceea ce se presupune de obicei, relația (22) rezultă direct din legea a II-a; anume, $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{v}' = (m\vec{v})' = \vec{p}'$. Dar relația (22) este generală; de exemplu, în cazul rachetelor, masa acestora este variabilă în

timp, deoarece pe timpul deplasării, se consumă foarte mult combustibil.

Exemple: 1) Un rinocer cu masa $m=2000$ kg aleargă cu viteza $v=7$ m/s. Care este impulsul său ?

Răspuns: $p=2000 \times 7=14000$ kgm/s.

2) Un autobuz are masa $m=3000$ kg și își reduce viteza de la $v_1=20$ m/s la $v_2=10$ m/s în $\Delta t=8$ secunde.

Care este forța medie de frânare ?

Răspuns:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}(mv_2 - mv_1) = \frac{1}{8}(3000 \times 20 - 3000 \times 10) = 3750 \text{ N}$$

3) O minge de tenis elastică și având masa m lovește un zid într-un interval de timp Δt . Presupunând că viteza inițială a mingii este \vec{v}_0 , perpendiculară pe zid, să se determine cu ce forță \vec{F} acționează zidul asupra mingii (figura 1.19).

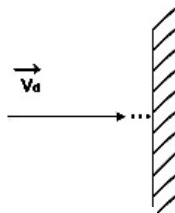


Fig. 1.19

Soluție: Avem $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \Delta \vec{p} = \frac{1}{\Delta t}(\vec{p}_f - \vec{p}_i)$. Deoarece

viteza finală este $-\vec{v}_0$, iar cea inițială este \vec{v}_0 , rezultă că

$$(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = -m\vec{v}_0 - m\vec{v}_0 = -2m\vec{v}_0, \text{ deci } \vec{F} = -\frac{2m\vec{v}_0}{\Delta t}.$$

4) O bilă de plastilină cu masa $m=30$ g lovește un zid cu viteza \vec{v}_0 perpendiculară pe zid; ciocnirea fiind plastică, bila rămâne lipită de zid. Să se determine mărimea forței cu care zidul acționează asupra bilei, dacă durata ciocnirii este de 0,15 s.

Soluție:

$$\vec{F} = \frac{1}{\Delta t} \Delta \vec{p} = \frac{1}{\Delta t} (-m\vec{v}_0 + 0) = -\frac{30 \times 10^{-3}}{15 \times 10^{-2}} \vec{v}_0 = -2 \cdot 10^{-1} \vec{v}_0$$

și rezultă $\vec{F} = -\frac{1}{5} \vec{v}_0$. Mărimea cerută este $v_0/5$.

4.2. Legea conservării impulsului

Un alt rezultat important al Mecanicii îl constituie următoarea

LEGEA A CONSERVĂRII IMPULSULUI: „Dacă un sistem mecanic este izolat (adică rezultanta \vec{R} a forțelor externe care acționează asupra sistemului este nulă), atunci impulsul acelui sistem, ca sumă a componentelor, este constant în timp”.

Iată un argument: impulsul sistemului este $\vec{H} = \vec{R}\Delta t$, deci $\vec{H} = 0$. Conform teoremei variației impulsului, $\vec{H} = \vec{p}'(t) = 0$ pentru orice t și ca atare, impulsul \vec{p} este constant.

Aplicații: 1) În urma exploziei unui proiectil, în condiții de izolare, iau naștere trei fragmente metalice având aceeași masă. Presupunând că aceste fragmente au vitezele situate în același plan și au aceeași mărime v , să se determine ce unghiuri fac între ei vectorii-viteză.

Soluție: Inițial, proiectilul era în repaus și vitezele $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ale celor trei fragmente erau nule. Ca atare, impulsul inițial era nul; conform teoremei de conservare a impulsului, impulsul final este nul, deci $m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 = 0$. Deoarece $m_1 = m_2 = m_3$, rezultă $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$. Așadar $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, deci $v_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$. Fie $\alpha = \text{măs} \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Deoarece $v_1 = v_2 = v_3 = v$ (conform ipotezei), rezultă $v^2 = v^2 + v^2 + 2v^2 \cos \alpha$, deci $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ și, ca atare, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Similar și pentru ceilalți vectori.

Se observă că în problemă se cere să se afle numai unghiurile dintre cele trei viteze. Dacă s-ar fi cerut să se afle mărimile celor trei viteze, ar fi fost necesar să se mai impună încă o condiție. Aici, cele trei impulsuri sunt în centrul unui triunghi echilateral, dar pozițiile lor nu sunt determinate!

2) Un vagonet cu masa m_1 se deplasează pe șine cu viteză constantă \vec{v}_1 , fără frecare. Un om cu masa m_2 aleargă spre vagonet și sare în vagonet cu viteza \vec{v}_2 ; vectorul-viteză \vec{v}_2 face unghiul de măsură α cu \vec{v}_1 . Să se calculeze mărimea vitezei vagonetului, după ce omul a sărit din vagonet.

Soluție: Fie v viteza vagonetului după ce omul a sărit în vagonet (figura 1.20).

Acceptăm că sistemul om-vagonet este **izolat** (neexistând influențe externe semnificative), deci impulsul se conservă.

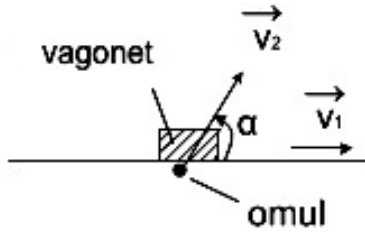


Fig. 1.20

Ca atare, $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$. Înmulțind scalar cu \vec{v} , rezultă $m_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}) + m_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}) = (m_1 + m_2) v^2$ și cum $\vec{v} \parallel \vec{v}_1$, rezultă $m_1 \cdot v_1 \cdot v \cdot \cos 0 + m_2 \cdot v_2 \cdot v \cdot \cos \alpha = (m_1 + m_2) v^2$, deci
$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

4.3. Ciocniri

Ciocnirile sunt fenomene mecanice în care impulsurile corpurilor implicate variază brusc. Ciocnirile **elastice** sunt cele în care se conservă energia și corpurile revin la forma inițială.

Dacă \vec{v}_1, \vec{v}_2 sunt vitezele (ca vectori) a două corpuri înainte de ciocnire și \vec{u}_1, \vec{u}_2 vitezele lor după ciocnire (în sistem izolat), iar masele lor sunt m_1 și m_2 , atunci:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \quad (23)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

conform legilor de conservare a impulsului și respectiv energiei.

Deoarece mișcarea și ciocnirea se produc 1–dimensional și la sol, prima relație este echivalentă cu relația scalară

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$, iar energiile potențiale ale corpurilor sunt nule. Din cele două relații (23), cunoscând v_1 , v_2 , m_1 , m_2 , se deduc u_1 , u_2 , rezolvând sistemul respectiv de ecuații.

Se pot analiza diverse cazuri particulare; de exemplu, cazul când corpul secund era în repaus înaintea ciocnirii deci $v_2=0$ sau cazul când corpurile au aceeași masă ($m_1=m_2$). De asemenea, dacă $m_2 \gg m_1$ (\equiv mult mai mare) și $v_2=0$, atunci $u_1=-v_1$ și $u_2=0$, deci bila mai ușoară este reflectată cu aceeași viteză, iar cea masivă rămâne în repaus.

Există de asemenea ciocniri **plastice**; este cazul unor bile din plastilină aruncate și lipite pe un zid. În acest caz, avem o relație de tipul $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$, dar energia cinetică nu se mai conservă (o parte din energia cinetică inițială transformându-se în căldură).

Aplicație: Se consideră o bilă din lemn de masă M suspendată printr-un fir inextensibil. Un glonț de masă m ($m \ll M$) este tras spre centrul bilei și aceasta este deviată, urcând la înălțimea h (figura 1.21).

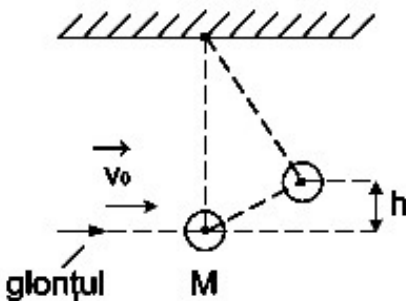


Fig. 1.21

Dacă se cunosc m , M , h , să se determine: a) viteza v_0 a glonțului înainte de ciocnire (presupusă plastică); b) ce fracțiune f din energia cinetică inițială a glonțului s-a transformat în căldură, după ciocnire.

Soluție:

a) Conform legii conservării impulsului, $mv_0 = (M + m)v$, unde v este viteza ansamblului bilă–glonț. Apoi, energia cinetică a ansamblului va fi transformată, după ciocnire, în energie potențială; aplicând legea conservării energiei, rezultă $\frac{1}{2}(M + m)v^2 = (M + m)gh$, $v = \sqrt{2gh}$, așadar,

$$v_0 = \frac{M + m}{m} v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}.$$

b) Energia cinetică inițială a fost $E_{cin,i} = \frac{1}{2}mv_0^2$ și energia cinetică finală $E_{cin,f} = \frac{1}{2}(M + m)v^2$. Diferența lor este tocmai căldura generată Q de ciocnire.

$$\text{A ș a d a r , } Q = E_{cin,f} - E_{cin,i} = \frac{1}{2}(M + m)v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \quad \text{și}$$

înlocuind $v^2 = 2gh$ și $v_0^2 = \left(\frac{M + m}{m}\right)^2 2gh$, rezultă

$$Q = gh(M + m)\frac{M}{m}, \text{ iar fracțiunea cerută este}$$

$$f = \frac{Q}{E_{cin,i}} = \frac{M}{M + m}.$$

§ 5. STATICĂ

5.1. Obiectul staticii

Statica este acea parte a Mecanicii care studiază echilibrul forțelor care acționează asupra corpurilor solide rigide (nu gaze sau lichide). Solidele rigide, pe care le vom numi în acest paragraf-corpuri, nu se deformează, putând fi deplasate (adică translatate sau rotite), fără a modifica distanțele dintre puncte. Există trei **principii** (numite și **axiome ale staticii**):

I. Două forțe care acționează asupra unui corp K realizează echilibrul (ca noțiune primară) dacă ele au punctele de aplicație pe aceeași dreaptă-suport și sunt de tipul $\vec{F}, -\vec{F}$; punctele de aplicație pot fi deplasate pe acea dreaptă-suport (figura 1.22)

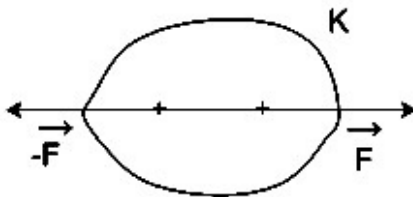


Fig. 1.22

II. Dacă mai multe forțe, care acționează asupra unui corp, sunt în echilibru, atunci rezultanta (\equiv suma) lor este nulă (fiecare forță fiind egală ca mărime și de sens opus cu rezultanta celorlalte);

III. Dacă două forțe \vec{F}_1, \vec{F}_2 , care acționează asupra unui corp K au un punct comun de aplicație, ele pot fi înlocuite cu suma lor $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (figura 1.23).

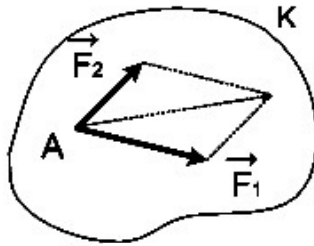


Fig. 1.23

Notă: În Statică, trebuie respectate aceste principii și trebuie aplicat cu precauție faptul că un vector ar fi egal cu o copie translatată a lui, așa cum se consideră la Geometrie.

5.2. Compunerea forțelor și legea pârghiilor

Începem cu două exemple simple:

Exemple: 1) Două forțe \vec{F}_1, \vec{F}_2 , au punctul de aplicație A , au mărimile $F_1=20$ N, $F_2=10$ N, iar unghiul $\angle(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ are măsura 60° . Să se determine mărimea rezultantei $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ și unghiurile dintre \vec{R} și cele două forțe (figura 1.24).

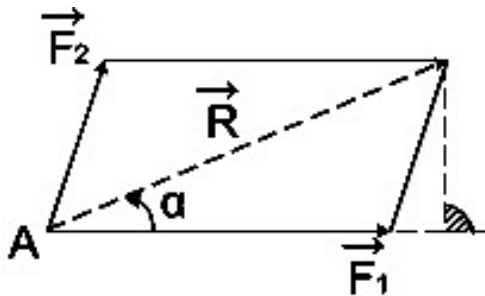


Fig. 1.24

Soluție: Din relația $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, rezultă:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 60^\circ = 400 + 100 + 400 \times \frac{1}{2} = 700$$

deci $R = 10\sqrt{7}N$. Apoi, folosind teorema cosinusului:

$$F_2^2 = F_1^2 + R^2 - 2F_1R\cos\alpha, \quad \alpha = \text{măs}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$$

Așadar, $100 = 400 + 700 - 2 \times 20 \times 10\sqrt{7} \cos\alpha$ și rezultă $\cos\alpha$ etc.

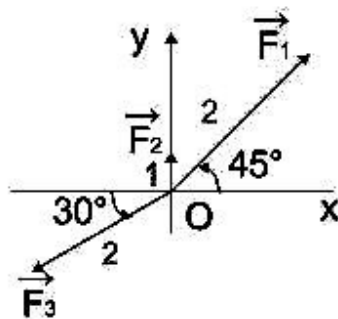
$$\text{Altă metodă: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{F_2 \sin 60^\circ}{F_1 + F_2 \sin 60^\circ}.$$

2) Se consideră un reper ortonormal xOy și forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, având punctul de aplicație în O , indicate în figura 1.25. Să se determine rezultanta \vec{R} a acestor forțe și mărimea ei.

Soluție: În general, dacă un vector \vec{OM} face unghiul α cu semiaxa pozitivă Ox și dacă $OM=r$, atunci $\vec{OM} = r(\vec{i} \cos\alpha + \vec{j} \sin\alpha)$, unde \vec{i} și \vec{j} sunt versorii axelor.

Așadar, $\vec{F}_1 = 2(\vec{i} \cos 45^\circ + \vec{j} \sin 45^\circ) = \vec{i}\sqrt{2} + \vec{j}\sqrt{2}$, $\vec{F}_2 = \vec{j}$, $\vec{F}_3 = 2(\vec{i} \cos 210^\circ + \vec{j} \sin 210^\circ) = -\vec{i}\sqrt{3} - \vec{j}$. Deci:

$$\vec{R} = \vec{i}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \vec{j}\sqrt{2} \quad \text{și} \quad R = \|\vec{R}\| = \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2} = \sqrt{6} - 1.$$



Să considerăm un corp K și două puncte $A, B \in K$. Există mai multe cazuri de forțe aplicate corpului. Fig. 1.25 corpului. Presupunem că aceste forțe au suporturile concurente într-un punct C (fig. 1.26).

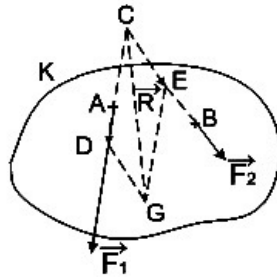


Fig. 1.26

Fie D și E astfel încât $\overrightarrow{CD} = \vec{F}_1$, $\overrightarrow{CE} = \vec{F}_2$ și $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{CG}$ (în paralelogramul $CEGD$). Așadar, am construit rezultanta forțelor \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , fără a afecta echilibrul corpului K .

Considerăm acum cazul când forțele \vec{F}_1, \vec{F}_2 au suporturile paralele și cu același sens, cu punctele de aplicație în $A, B \in K$ (figura 1.27).

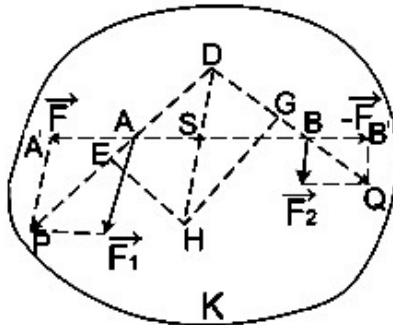


Fig. 1.27

Alegem o forță $\vec{F} = \overrightarrow{AA'}$ aplicată în A și aplicăm $-\vec{F} = \overrightarrow{BB'}$ în B , paralel cu dreapta AB .

Atunci $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}) + (\vec{F}_2 - \vec{F}) = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}$.

Fie $D = AP \cap BQ$.

Alegem ca în cazul anterior E și G astfel încât $\overline{DE} = \overline{AP}$, $\overline{DG} = \overline{BQ}$ și $\vec{R} = \vec{AP} + \vec{BQ} = \vec{DE} + \vec{DG} = \vec{DH}$ cu regula paralelogramului. Fie $S = DH \cap AB$.

Știm că $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$ și $\vec{R} \parallel \vec{F}_1$. Deoarece $\overline{DS} \parallel \vec{F}_1 \parallel \overline{A'P}$, rezultă că triunghiurile SAD și APA' sunt asemenea, deci $\frac{SA}{F} = \frac{SD}{F_1}$, adică $SA \cdot F_1 = SD \cdot F$. De asemenea,

triunghiurile SBD și $BB'Q$ sunt asemenea, deci $\frac{SB}{F} = \frac{SD}{F_2}$, adică

$SB \cdot F_2 = SD \cdot F$. În concluzie $SA \cdot F_1 = SB \cdot F_2$. În fine, alegem S_1 pe dreapta DH astfel încât $\overline{SS_1} = \overline{DH}$. Efectul forțelor paralele \vec{F}_1, \vec{F}_2 , pentru echilibrul corpului K este același cu efectul rezultantei \vec{R} , aplicate în S .

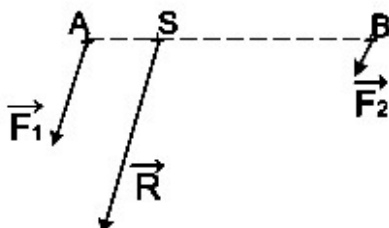


Fig. 1.28

Folosind axiomele I–III ale Staticii, am arătat că în situația din figura 1.28, punctul de aplicație al rezultantei $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ este S .

Așadar, am demonstrat

TEOREMA (ARHIMEDE) „Fiind date punctele distincte A și B ca puncte de aplicație ale forțelor paralele și de același sens $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$, rezultanta $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ este paralelă cu forțele și are punctul de aplicație S în acel unic punct de pe segmentul $[AB]$ astfel încât

$$SA \cdot F_1 = SB \cdot F_2 \quad (24)$$

Notă: Relația (24) este tocmai **legea pârghiilor**. SA este brațul forței \vec{F}_1 și SB =brațul forței \vec{F}_2 . Dacă $F_1 = F_2$, atunci S este mijlocul segmentului $[AB]$.

Considerăm acum cazul când $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$, dar au sens contrar și presupunem că $F_1 > F_2$ (ca mărime). Atunci alegem punctul-suport (\equiv de sprijin) S situat pe prelungirea drepte AB , mai aproape de forța mai mare, astfel încât să aibă loc relația (24), (figura 1.29.).

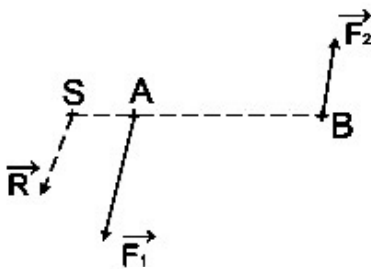


Fig. 1.29

Dacă $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ și suporturile lor sunt diferite, atunci se spune că avem un **cuplu de forțe**; în acest caz, corpul K se rotește în jurul mijlocului segmentului $[AB]$. Rezultanta cuplului este nulă și efectul asupra corpului K nu mai este o translație, ci o rotație.

Exemple: 1) Considerând un taburet de bar, care se poate roti liber, dacă taburetelui i se aplică două forțe formând cuplu, taburetul se rotește (deși rezultanta celor două forțe este nulă).

2) Două forțe paralele $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$ au mărimile $F_1=60$ N, $F_2=40$ N și punctele lor de aplicație se află la distanța $AB=25$ cm.

Să se determine rezultanta lor și punctul ei de aplicație, în fiecare din cazurile:

a) forțele au același sens;

b) forțele au sens contrar.

Soluție:

a) În acest caz, punctul S de aplicare a rezultantei este situat pe segmentul $[AB]$, mai aproape de \vec{F}_1 . Avem $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, deci $R=100$ N; apoi, conform legii pârghiilor, $F_1 \cdot SA = F_2 \cdot SB$, deci $\frac{SA}{SB} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ și cu proporții derivate, $\frac{SA}{AB} = \frac{2}{5}$. Așadar, $SA = \frac{2}{5} \cdot AB = 10$ cm.

b) S este situat pe prelungirea dreptei AB , de partea forței \vec{F}_1 . Din nou $\frac{SA}{SB} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{2}{3}$, dar $\frac{SA}{SB - SA} = \frac{2}{3 - 2}$, de unde $SA=50$ cm. Rezultanta $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ are acum mărimea $R = F_1 + (-F_2) = 20$ N.

5.3. Mașini și mecanisme simple

Noțiunile de „echilibru” și „lucru mecanic” pot părea contradictorii. O forță efectuează lucru doar dacă este aplicată

unui punct aflat în mișcare, iar echilibrul sugerează tocmai lipsa mișcării. Deoarece forța musculară a omului este prea limitată, s-au inventat multe dispozitive care să ne amplifice forțele: pârgii, răngi, pensete, clești, foarfeci, pedale, mânere, menghine, roabe, bascule etc.

Pârghiile sunt bare rigide având un punct de sprijin („punctul S ”, numit și articulația fixă). Ca un corolar al legii pârgiilor, o pârghie ca în figura 1.30 este în echilibru dacă are loc relația (24).

Nu putem uita cuvintele atribuite lui Arhimede: „Dați-mi un punct de sprijin și voi muta Pământul”, folosite și în contexte extinse, sociale sau politice. Dar pentru a muta Pământul cu doar 1 m, brațul pârgiei trebuie să fie enorm! (figura 1.30)

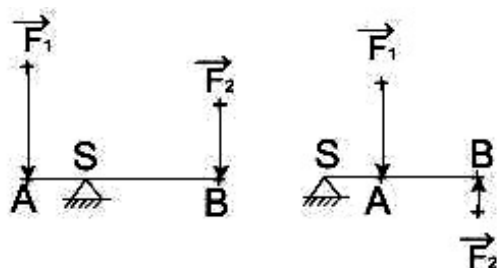


Fig. 1.30

Exemplu: Se consideră situația din figura 1.31. Să se descompună forța \vec{R} în componente paralele cu \vec{R} , știind că $R=125\text{ N}$, $OA=15\text{ cm}$ și $AB=25\text{ cm}$.

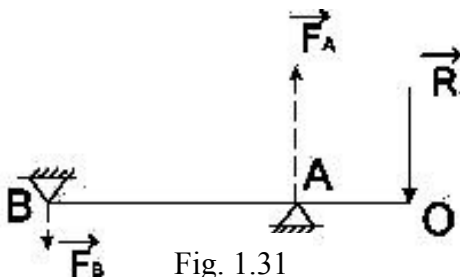


Fig. 1.31

Soluție: \vec{F}_B are același sens cu \vec{R} , iar \vec{F}_A sens contrar.

Așadar, $F_A - F_B = 125$ și, conform legii pârghiilor,

$$F_A \cdot OA = F_B \cdot OB, \text{ deci } \frac{F_A}{F_B} = \frac{OB}{OA} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}, \frac{F_A - F_B}{F_B} = \frac{5}{3}, \text{ de unde}$$

$$F_B = 75 \text{ N și } F_A = 200 \text{ N.}$$

Asupra unei pârghii, se exercită o „forță activă și una rezistivă”. De asemenea, pârghiile au câte un ax și, după poziția acestuia, ele sunt unilaterale (pensete, răngi) sau bilaterale (foarfeci, clești). În toate exemplele menționate, esența o constituie legea pârghiilor. Scripeții sunt tot exemple de pârghii; un scripete este o roată având un canal pentru cablu (lanț sau fir), montat într-un lăcaș. Scripetele fix are un ax fix și el nu dă avantaje (cel mult modifică direcția forței active). La scripetele mobil, axul coboară sau urcă odată cu încărcătura.

Niciun mecanism nu dă vreun câștig de lucru mecanic sau energie! Ca un reflex întârziat al legii conservării energiei, se spune așa: „ceea ce se câștigă în forță, se pierde în distanță”.

Exemplu: În figura 1.32, forța \vec{F} aplicată la capătul liber al firului A se transferă prin scripeți, prin firele B și C. Fiecare acționează asupra greutății \vec{G} tot cu forța \vec{F} deci $2\vec{F} = \vec{G}$.

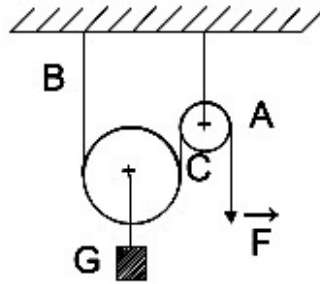


Fig. 1.32

Pentru a ridica greutatea \vec{G} cu 1 m, firul de la capătul liber trebuie să aibă 2 m.

Întâlnim atât corpuri libere (păsări, elicoptere, rachete), dar și corpuri supuse la diverse legături (încăstrare, reazem etc.). În cazul reazemului simplu, un corp se sprijină pe alt corp într-un punct sau pe o suprafață, ca în figura 1.33.

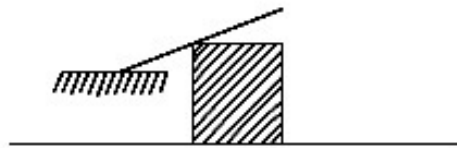


Fig. 1.33

Încăstrarea este legătura prin care un corp (de exemplu, o grindă) este fixat rigid, în consolă, în alt corp, ca în figura 1.34, iar articulațiile împiedică orice altă deplasare în afara rotirii în jurul unui ax.

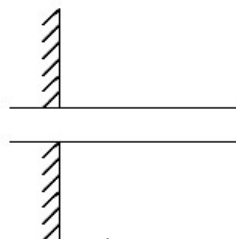


Fig. 1.34

5.4. Descompunerea forțelor

Am văzut rolul descompunerii diverselor forțe în studiul mișcării pe un plan înclinat, dar astfel de descompuneri se aplică și în alte situații. Regula de bază este următoarea: pentru a descompune o forță după două direcții, trebuie duse prin extremitățile vectorului-forță drepte paralele cu direcțiile de descompunere.

În exemplul următor (figura 1.35) se dau direcțiile d_1 și d_2 și vectorul $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, ($\vec{F}_1 \parallel d_1, \vec{F}_2 \parallel d_2$).

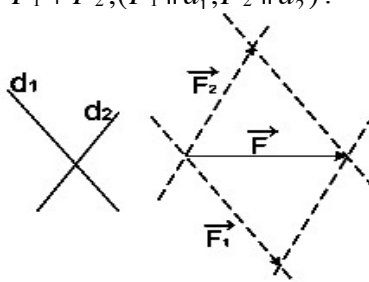


Fig. 1.35

Aplicații:

1) **Pendulul matematic**

Considerăm un corp M cu masa punctuală m , de exemplu o bilă mică, legată de punctul O printr-un fir inextensibil OM (figura 1.36), care oscilează într-un plan vertical.

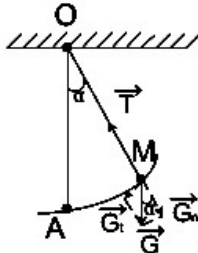


Fig. 1.36

Poziția verticală OA este poziția de echilibru și după o abatere cu unghiul α , greutatea corpului $\vec{G} = m\vec{g}$ se descompune pe direcția firului OM și pe direcția tangentei la cercul descris de M : $\vec{G} = \vec{G}_n + \vec{G}_t$. Componenta normală \vec{G}_n are mărimea $G \cos \alpha$, iar componenta tangențială \vec{G}_t are mărimea $G \sin \alpha$. Componenta normală este echilibrată de tensiunea \vec{T} din firul OM .

2) Reazem în consolă

Un corp cu masa m se sprijină pe două bare AB și AC (figura 1.37). Greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$ se poate descompune în componente, pe direcțiile celor două bare. Ducem paralele MD și ME la bare. Atunci $\vec{G} = \vec{AD} + \vec{AE}$ (în paralelogramul $AEMD$).

Mărimile celor două componente sunt:

$$AD = \frac{mg}{\cos \alpha}, \quad AE = mg \cdot \tan \alpha.$$

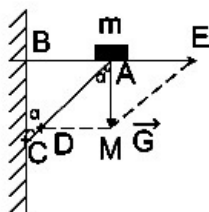


Fig. 1.37

3) Se consideră un fir fixat între doi pereți, ca în figura 1.38, de care atârnă la mijloc o încărcătură de masă m . Firul face săgeată și determinăm tensiunea T a firului. Pentru aceasta, descompunem forța de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ pe direcția firelor.

Rezultă $T = \frac{G}{2 \sin \alpha}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dacă α crește, atunci

$\sin \alpha$ crește și T scade. Iar dacă α se micșorează, tensiunea crește și firul se poate rupe.

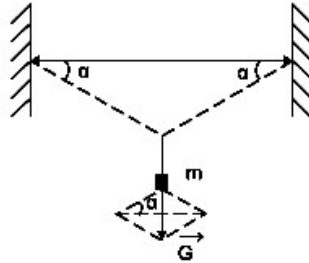


Fig. 1.38

Dacă firul nu s-ar întinde, de el nu s-ar putea atârna greutatea, fapt utilizat în proiectarea construcțiilor; construcțiile „trebuie să respire”, să nu fie prea rigide, din cauza tensiunilor mari care pot apărea la mici deformări.

5.5. Momentul unei forțe în raport cu un punct

Prin definiție, **momentul unei forțe** $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ în raport cu un punct O este produsul vectorial:

$$\vec{M}_{(O)} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \vec{r}_A \times \vec{F}; \quad (25)$$

este un vector perpendicular atât pe vectorul de poziție \vec{r}_A al punctului de aplicație al forței \vec{F} , cât și pe \vec{F} . Mărimea lui este $OA \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot OO'$, ($OO' \perp AB$). Sensul este dat de „regula burghiului” (figura 1.39).

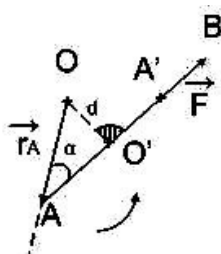


Fig. 1.39

Dacă A' este un alt punct situat pe suportul lui $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$, atunci $\vec{M}_{(O)} = \overrightarrow{OA'} \times \vec{F}$ (deoarece $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'}$, $\vec{F} \times \overrightarrow{AA'} = 0$).

Distanța $d = OO'$, de la O la suportul forței se numește **brațul forței** și $\|\vec{M}_{(O)}\| = F \cdot d$.

Exemplu: Momentul rezultat al unui cuplu ($\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ și $-\vec{F} = \overrightarrow{CD}$) în raport cu un punct O nu depinde de acel punct; într-adevăr, $\overrightarrow{OA} \times \vec{F} + \overrightarrow{OC} \times (-\vec{F}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) \times \vec{F} = \overrightarrow{CA} \times \vec{F}$ și acest produs vectorial nu depinde de O .

Notă: Considerăm un disc de centru O , fixat pe un ax (figura 1.40). Dacă o forță \vec{F} este aplicată într-un punct de pe ax, ea nu are efect; dar dacă este aplicată într-un punct $A \neq O$, interior discului, acesta se rotește. Efectul depinde de mărimea forței și a distanței OA , adică de momentul forței \vec{F} în raport cu centrul O .

Dacă mai multe forțe acționează asupra unui corp, suma momentelor lor în raport cu un punct se numește **momentul resultant**.

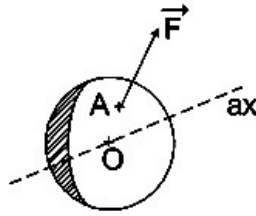


Fig. 1.40

Un rezultat teoretic, pe care îl acceptăm fără demonstrație, este următoarea **teoremă a lui Varignon**: „Dacă forțele au suporturile concurente în același punct, sau sunt paralele, atunci momentul resultant este egal cu momentul rezultantei acelor forțe”.

Exemple: 1) Un cablu de lungime $BC=l$ este legat de un stâlp BA sub unghiul α și este întins cu forța \vec{F} . Să se afle α dacă momentul forței \vec{F} în raport cu punctul A are mărimea maximă (figura 1.41).

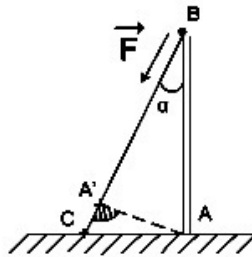


Fig. 1.41

Soluție: Avem $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(A)} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$; mărimea acestui vector este $F \cdot AB \cdot \sin \alpha = F \cdot BC \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} Fl \sin 2\alpha$. Această valoare este maximă dacă $\sin 2\alpha = 1$ și $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Notă: Momentul $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(A)}$ se numește momentul **de răsturnare** (a stâlpului).

2) Se consideră un reper ortonormal xOy de versori \vec{i}, \vec{j} .

Se consideră forțele $\vec{F}_1 = \vec{i} - \vec{j}$, aplicată în punctul $A(1,0)$, $\vec{F}_2 = 2\vec{i}$, aplicată în $B(1,1)$ și $\vec{F}_3 = 2\vec{j}$ aplicată în punctul $C(0,1)$. Să se verifice în acest caz particular teorema lui Varignon (Figura 1.42), pentru momentele în raport cu O .

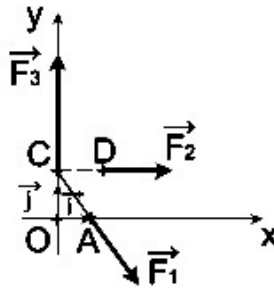


Fig. 1.42

Soluție: Suporturile celor trei forțe sunt concurente în punctul C și rezultanta lor este $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 3\vec{i} + \vec{j}$. Avem de arătat că $\overrightarrow{OA} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{OB} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{OC} \times \vec{F}_3 = \overrightarrow{OC} \times \vec{R}$.

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F_1} &= \vec{i} \times (\vec{i} - \vec{j}) = -\vec{i} \times \vec{j} \\ \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{F_2} &= (\vec{i} + \vec{j}) \times 2\vec{i} = 2\vec{j} \times \vec{i} = -2\vec{i} \times \vec{j} \\ \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{F_3} &= \vec{j} \times 2\vec{i} = 0\end{aligned}$$

și membrul întâi este egal cu $-3\vec{i} \times \vec{j}$.

$$\text{Iar } \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{R} = \vec{j} \times (3\vec{i} + \vec{j}) = -3\vec{i} \times \vec{j}.$$

5.6. Echilibrul unui solid rigid

Se spune că un solid rigid **se află în echilibru** dacă, sub acțiunea tuturor forțelor care acționează asupra sa, el nu își modifică poziția față de un reper fix (sau inerțial). O particulă este în echilibru \Leftrightarrow rezultanta \overrightarrow{R} a tuturor forțelor care acționează asupra ei este nulă. Acest fapt este valabil și pentru un corp solid rigid care ar putea fi doar translatat, nu și rotit, pe o suprafață orizontală sau pe un plan înclinat. Am văzut în subparagraful 5.3 că o pârghie asupra căreia acționează două forțe paralele este în echilibru dacă punctul de sprijin S satisface relația (24). Dar atunci suma momentelor forțelor respective în raport cu S este nulă. Mai general, are loc următoarea:

TEOREMĂ (a condițiilor de echilibru). „Presupunem că toate forțele care acționează asupra unui solid rigid sunt coplanare (adică forțele respective au suporturile conținute într-un plan sau paralele cu un același plan).

Solidul se află în echilibru \Leftrightarrow

- 1) Rezultanta forțelor este nulă;
- 2) Suma momentelor forțelor relativ la orice punct este nulă”.

Exemple: 1) Un corp aflat pe un plan înclinat se poate cel mult translata (figura 1.43).

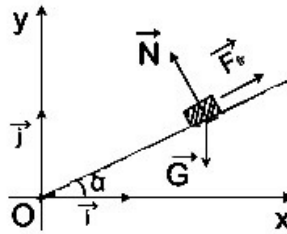


Fig. 1.43

Condiția de echilibru este ca rezultanta forțelor care acționează asupra corpului să fie nulă: $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{fr} = 0$.

Înmulțind scalar cu \vec{i} , rezultă:

$$0 + N \cdot 1 \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + F_{fr} \cdot 1 \cdot \cos \alpha = 0,$$

deci $-N \cdot \sin \alpha + k \cdot N \cdot \cos \alpha = 0$, și regăsim condiția $\tan \alpha = k$, stabilită în subparagraful 2.2 (k este coeficientul de frecare pe plan).

2) Un tăvălug cilindric de rază R și greutate G se află rezemat pe un plan înclinat (cu α), în fața unui prag de înălțime h (figura 1.44). Pentru ce α , tăvălugul trece peste prag?

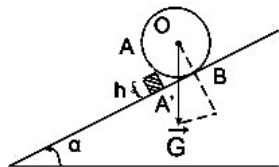


Fig. 1.44

Soluție: Forțele care acționează asupra tăvălugului sunt : greutatea \vec{G} și reacțiunile \vec{N}_A, \vec{N}_B . După ce tăvălugul se rostogolește, reacțiunea în B devine nulă. Condiția de echilibru este ca suma momentelor forțelor menționate relativ la A să fie nulă. Așadar, $(G \sin \alpha) \cdot (R - h) - (G \cos \alpha) \cdot d = 0$, unde $d = A'B$.

$$\text{Rezultă } \operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{R - h}.$$

Orice particulă de masă m este atrasă spre centrul Pământului cu forța gravitațională $\vec{G} = m\vec{g}$ (greutatea particulei). Orice corp K este alcătuit din particule A_i având mase m_i (număr imens, dar finit !); masa corpului este $M = \sum_i m_i$ și greutatea lui este $\vec{G} = \sum_i (m_i \vec{g}) = \vec{g} \sum_i m_i = M\vec{g}$

[am presupus g constant, $g \approx 9,81$]. Punctul de aplicație al lui \vec{G} este numit **centrul de greutate** al corpului K și este notat cu G_K . Corpul K este **omogen** dacă masa M este distribuită uniform, în sensul că dacă numărul particulelor componente A_i este N , atunci $m_i = \frac{M}{N}$ pentru orice i . Pentru un corp omogen de masă

M și volum V , se definește **densitatea de volum** $\rho = \frac{M}{V}$,

măsurată în kg/m^3 ; în cazul barelor omogene, se definește **densitatea liniară** $\rho = \frac{M}{l}$ (l = lungimea barei), iar în cazul

plăcilor plane omogene, se definește **densitatea superficială**,

$$\rho = \frac{M}{A} \quad (A = \text{aria plăcii}).$$

Revenim la cazul unui corp solid omogen K cu masa M , alcătuit din N particule A_i . Considerând un punct de referință O și notând $\vec{r}_i = \overrightarrow{OA_i}$, vectorul de poziție al particulei A_i , se poate arăta că vectorul de poziție al centrului de greutate G_K este

$$\overrightarrow{OG_k} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{N} \sum_i \vec{r}_i \quad (26)$$

În cazul când corpul K are o axă de simetrie, centrul de greutate G_K aparține acelei drepte, iar dacă acel corp K are un centru de simetrie, G_K va fi tocmai acel centru.

În studiul echilibrului unui corp solid, este util de calculat momentul forței de greutate în raport cu centrul său de greutate.

Exemple: 1) Pentru o bară omogenă K , centrul de greutate G_K se află la mijlocul barei și pentru o placă omogenă triunghiulară, G_K se află la intersecția medianelor, iar pentru orice punct de referință O , avem $\overrightarrow{OG_k} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$, media aritmetică a vectorilor de poziție ai vârfurilor triunghiului.

2) Pentru un con circular drept omogen, G_K este situat pe înălțimea conului la trei pătrimi de vârf.

3) Fie K un corp solid sprijinit pe o față plană (suprafață de sprijin). Echilibrul lui K se zice **stabil**, dacă după „mici intervenții” asupra corpului, acesta revine la poziție. De

exemplu, o prismă, ca în figura 1.45, pentru care centrul de greutate se proiectează în interiorul suprafeței de sprijin (hașurate), este în echilibru stabil. Astfel, celebrul turn din Pisa este încă în echilibru stabil.

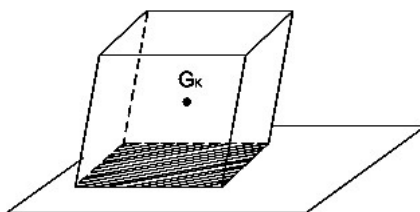


Fig. 1.45

§ 6. ELEMENTE DE MECANICA FLUIDELOR

Spre deosebire de solide, fluidele (\equiv lichide sau gaze) nu opun rezistență la modificarea formei. Astfel, atingând cu degetul apa din pahar, aceasta este împinsă alături. Pentru a modifica volumul unui lichid sau pentru a reduce volumul unui gaz, sunt necesare forțe externe; de exemplu, agitând apa, apar valuri. Am definit în subparagraful 2.4 presiunea ca forța care acționează pe unitatea de suprafață. Presiunea se măsoară în „pascali”; $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$, dar există și alte unități de măsură.

6.1. Hidrostatică

Etimologic, „hidro” \equiv apă și „status” \equiv stare, deci hidrostatica se ocupă cu starea apei și a altor lichide în repaus. Gazele nu au o suprafață liberă („suprafață liberă” = frontiera dintre fluid și un mediu ușor deformabil, de exemplu), dar lichidele au o suprafață liberă orizontală, care nu este în contact

cu pereții recipientilor. Un prim fapt fundamental, specific fluidelor, îl constituie

LEGEA LUI PASCAL: „Presiunea externă aplicată unui lichid sau gaz este transmisă în mod egal și nemicșorată, în toate direcțiile”.

Exemple: 1) Într-un vas sferic de cauciuc, prevăzut cu orificii egale, plin cu apă, se constată că prin apăsare, apa iese la fel prin toate orificiile.

2) Într-un cilindru cu piston, dacă presiunea crește cu 1 Pa, ea va crește cu 1 Pa în toate punctele, inclusiv la perete.

O coloană de fluid aflată în câmp gravitațional exercită o presiune datorată greutateii coloanei. Dacă ρ este densitatea lichidului (sau gazului) și h este înălțimea coloanei, atunci presiunea este dată de următoarea **formulă barometrică** („baros”≡greutate, în grecește):

$$p = \rho \cdot g \cdot h, \text{ cu } g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad (27)$$

Iată un argument (cu notații transparente):

$$\rho \cdot g \cdot h = \frac{m}{V} \cdot g \cdot h = \frac{m}{Sh} \cdot g \cdot h = \frac{mg}{S} = \frac{G}{S} = p, \text{ pentru o coloană}$$

cilindrică cu aria secțiunii S și volumul $V = S \cdot h$. Mărimea presiunii este de fapt independentă de forma coloanei și depinde doar de înălțimea coloanei ; de exemplu, în apă presiunea crește cu adâncimea.

Legea lui Pascal se aplică în multe situații, începând cu **vasele comunicante**. Stropitoarea și cafetiera sunt exemple

cotidiene; apa turnată în stropitoare se află la același nivel în vas și în țeava laterală.

Suprafețele de lichid (aflat în repaus) în vase comunicante de orice formă sunt la același nivel; într-adevăr, conform legii lui Pascal și formulei (27), avem $\rho \cdot g \cdot h_1 = \rho \cdot g \cdot h_2$.

Dar dacă turnăm un tip de lichid într-un tub al vaselor și alt tip de lichid în celălalt, atunci, după echilibru, lichidele nu se vor afla la același nivel; în acest caz, $\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$, deci

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{ și lichidul cu densitate mai mare, va fi mai jos.}$$

Aplicații (prese hidraulice):

1) Fie situația din figura 1.46, cu vid deasupra pistoanelor. Pistonul 1 are aria S_1 , iar pistonul 2 are aria S_2 . Asupra pistonului 1 acționează forța \vec{F} . Ce forță de echilibrare trebuie aplicată pe pistonul 2?

Răspuns: Așadar, asupra pistonului 1 acționează presiunea $p_1 = \frac{F}{S_1}$ și, conform legii lui Pascal, această presiune este transmisă și pistonului 2. Pentru echilibrare, trebuie pus pe pistonul 2 un corp de masă M , astfel încât $\frac{F}{S_1} = \frac{Mg}{S_2}$.

Așadar, presiunea pe pistonul 1 de sus este egală cu presiunea pe pistonul 2 de jos. Deci, forța F_2 de echilibrare

aplicată pistonului 2 va fi $F \frac{S_2}{S_1}$ (de atâtea ori mai mare ca F , de

câte ori aria lui 2 este mai mare ca aria lui 1; de exemplu, dacă $S_1=10 \text{ cm}^2$, $S_2=200 \text{ cm}^2$ și $F=100 \text{ N}$, atunci $F_2=2000 \text{ N}$).

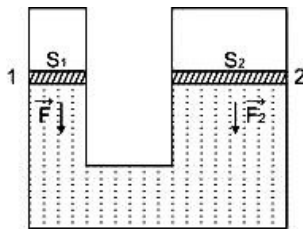


Fig. 1.46

2) Fie acum situația din figura 1.47, cu vid deasupra pistoanelor. Pistonul 1 are aria S_1 și masa m_1 și pe el se așează o încărcătură de masă M_1 . Pistonul 2 are aria S_2 și masa m_2 . Ce masă are încărcătura de echilibru care trebuie pusă pe pistonul 2, dacă 1 este deasupra lui 2 cu înălțimea h , iar densitatea lichidului este ρ ?

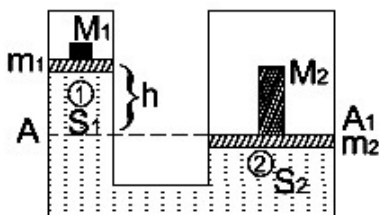


Fig. 1.47

Soluție: Pistonul 1 împreună cu greutatea de pe el transmit lichidului presiunea $\frac{(M_1 + m_1)g}{S_1}$, la care se adaugă presiunea suplimentară ρgh datorată greutateii lichidului. Conform legii lui Pascal, aceasta se transmite pe suprafața inferioară a pistonului 2. Ea trebuie să echilibreze presiunea $\frac{(M_2 + m_2)g}{S_2}$, unde M_2 este tocmai masa căutată.

$$\text{Așadar, } M_2 = (M_1 + m_1) \frac{S_2}{S_1} + \rho h S_2 - m_2.$$

Notă: Ducem un plan orizontal prin dreapta AA_1 . Corect era ca presiunea p_1 din stânga pe acest plan să fie $p_1 = \frac{(M_1 + m_1)g}{S_1} + p_a + \rho gh$ și similar $p_2 = \frac{(M_2 + m_2)g}{S_2} + p_a$.

Dar conform legii lui Pascal, $p_1 = p_2$ și presiunea atmosferică p_a se reduce. Rezultatul este cel de sus, dar avem un plus de rigoare.

Presele hidraulice se utilizează la stoarcerea uleiurilor, comprimarea placajului, la diverse elevatoare etc.

Rezultatul principal al hidrostaticii este următoarea teoremă nemuritoare:

PRINCIPIUL LUI ARHIMEDE: „Un corp imersat (scufundat) într-un fluid este împins ascensional (adică de jos în sus) de o forță egală cu greutatea fluidului dislocuit”.

Exemple: 1) La adâncimea de 10 m sub nivelul mării, presiunea este:

$$p = \rho gh = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ N/kg} \times 10 \text{ m} = 98100 \text{ N/m}^2 \approx 1 \text{ bar},$$

fără a socoti presiunea atmosferică. La 50m adâncime, presiunea apei va fi de circa 5 bari. Din cauza densității ρ , presiunea din mare este ceva mai crescută decât cea din apa dulce.

2) Dacă un corp cu volumul $V=15 \text{ dm}^3$ este scufundat în apă, forța ascensională va avea mărimea $F_A=G=mg$, unde m este masa lichidului dislocuit deci $m=\rho V=15\text{kg}$. Atunci $F_A=15 \times 9,81=147,2\text{N}$.

Aplicație:

Iată o demonstrație, într-un caz particular, a principiului lui Arhimede: considerăm un corp cilindric (hașurat), imersat (scufundat) într-un fluid cu densitatea ρ și cu volumul V . Asupra lui acționează forțe normale la suprafața care delimitează cilindrul. (fig.1.48)

Deoarece presiunea crește cu adâncimea, avem $F_2 > F_1$, deci rezultanta $\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ va fi îndreptată vertical în sus.

Forța \vec{F}_A se numește **ascensională arhimedică** și mărimea este:

$$F_A = F_2 - F_1 = p_2 S - p_1 S = S(p_2 - p_1) = S(\rho gh_2 - \rho gh_1) = \rho Sg(h_2 - h_1) = \rho gV$$

Dar V este evident egal cu volumul de fluid pe care corpul îl dislocuiește, iar $\rho V = m$ este masa de fluid. Ca atare, $F_A = mg = G$, tocmai greutatea fluidului dislocuit.

Notă: Pentru a calcula F_A nu contează forma corpului, nici materialul din care este făcut și nici adâncimea la care el se află imersat.

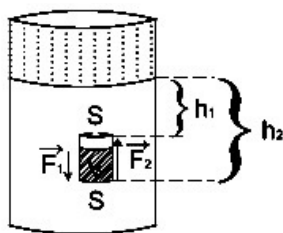


Fig. 1.48

Principiul lui Arhimede stă la baza plutirii vapoarelor, obiectelor pe apă sau a baloanelor sau dirijabililor, în aer.

Să presupunem acum că densitatea corpului este ρ_K , deci masa lui va fi $M = \rho_K V$ și greutatea $G_K = Mg = \rho_K Vg$. Dacă $\rho_K > \rho$, atunci $G_K > F_A$, deci greutatea corpului „învinge” forța ascensională și corpul se scufundă (\equiv se îneacă). (Fig. 1.48 bis, forța ascensională asupra cubului, datorită presiunii mai mari asupra feței inferioare).

Exemplu: Din cauza forței ascensionale, sub apă pietrele se ridică mai ușor. Astfel, pentru o piatră de 1 kg (cu $\rho_K = 2 \text{ kg/dm}^3$), imersată în apă de mare (cu $\rho = 1030 \text{ kg/m}^3$), forța ascensională este $F_A = 1030 \times 9,81 \times 0,5 \times 10^{-3} \cong 5 \text{ N}$, iar greutatea este $G = 2000 \times 9,81 \times 0,5 \times 10^{-3} \cong 9,81 \text{ N}$.

Trebuie menționat că densitatea animalelor de apă sau a peștilor este apropiată de densitatea apei și de aceea, greutatea lor este compensată de forța ascensională.

Dacă $\rho_K \leq \rho$, atunci corpul plutește (\equiv se scufundă parțial). Este cazul lemnului care plutește pe apă, dar nu și al fierului.

Notă: Am întâlnit până acum diverse tipuri de forțe – de frecare, elastice sau atracție universală (gravitație). Forțele arhimedice nu sunt de un tip nou, ele fiind o rezultantă a interacțiilor elastice dintre corpuri și fluide.



6.2. Presiunea atmosferică (“atmos”≡abur, în grecește)

Atmosfera terestră este de fapt un ocean de aer, care înconjoară Pământul, până la altitudini de mii de km, iar noi, oamenii, ne aflăm la „fundul” acestui ocean ($h=0$). Toate corpurile de pe Pământ suportă presiunea atmosferică, pe care o notăm cu p_a . Italianul Torricelli a fost primul care a măsurat-o: p_a este egală cu presiunea exercitată de o coloană de Hg (mercur) cu înălțimea de 760 mm.

Așadar, dacă două vase comunicante conțin mercur și dacă unul este apăsat cu presiunea p_a , atunci mercurul se ridică în celălalt la înălțimea de 760 mm, presupunând că deasupra coloanei de mercur este vid. Densitatea mercurului este $\rho_{Hg} \cong 13,6 \text{ kg/dm}^3$, deci presiunea de 1 mm coloană de mercur este

$p = \rho gh \cong 13600 \times 9,81 \times 10^{-3} \cong 133,3 \text{ Pa}$ și ca atare, $p_a \cong 760 \times 133,3 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Prin convenție:

$10^5 \text{ Pa} \equiv 1 \text{ bar}$; $1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \equiv 1 \text{ atm}$ („atmosferă”) și

$9,81 \times 10^4 \text{ Pa} \equiv 1 \text{ at}$ („atmosferă tehnică”)

O coloană de apă care exercită la baza ei o presiune cât presiunea atmosferică are înălțimea

$h = 760 \times \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{apa}} \cong 760 \times 13,6 \cong 10,3 \text{ m}$. Pentru a determina

valorile diverselor presiuni, se utilizează **manometre** („manos”=rarefiat, în grecește).

Tot Torricelli a remarcat că p_a nu este o constantă; de exemplu, la $h=1 \text{ km}$ înălțime, $p_a \cong 670 \text{ mm col. Hg}$. Presiunea medie la 0°C și la sol este numită **presiunea normală** (notată uneori p_0).

Exemple:

1) Masa unui elev este de 50 kg ; înălțimea lui este de $1,6 \text{ m}$, iar suprafața corpului de $1,4 \text{ m}^2$; forța exercitată de atmosferă este $F = 1,013 \times 10^5 \times 1,4 \cong 142000 \text{ N}$ (Masa și înălțimea elevului nu au importanță!). Această forță este imensă și se pune întrebarea cum rezistăm la o astfel de presiune [Răspunsul este simplu: aceeași presiune există și din interiorul corpului!]. În această ordine de idei, amintim de celebrul experiment al lui von Guericke cu „emisferele de Magdeburg”.

2) La baza unui munte, barometrul arată $p_a \cong 758 \text{ mm col.Hg}$ și la vârf, $p_a' \cong 715 \text{ col.Hg}$. Care este înălțimea muntelui?

Răspuns: Notând cu ρ densitatea aerului, avem $\rho \cdot g \cdot h_2 = 715$ și $\rho \cdot g \cdot h_1 = 758$. Dar $\rho \cong 1,29 \text{ kg/m}^3$, deci

$$h_1 - h_2 = \frac{758 - 715}{\rho \cdot g} = \frac{43 \times 133,3}{1,29 \times 9,81} \cong 453 \text{ m.}$$

Aceasta este înălțimea cerută (considerând $h_2=0$).

Notă: Atmosfera Pământului este mediul unde au loc feluritele fenomene ale naturii – vânturi, uragane, ploi, fulgere, ninsori etc., toate explicate în Fizică. Atmosfera se rotește o dată cu Pământul, iar moleculele de aer nu părăsesc planeta, deoarece ele nu ating prima viteză cosmică și nicidecum, viteza de scăpare (vezi subparagraful 2.3).

6.3. Vapoare, baloane, submarine

Transportul pe mări și oceane este deocamdată cel mai ieftin. Materialele din care sunt făcute vapoarele au diverse densități. Carena este făcută din plăci de oțel și montajul intern are mult metal. Partea imersată dislocă atâta apă încât greutatea apei dislocate să fie egală cu cea a corpului în aer. Adâncimea la care un vapor este imersat este marcată pe carenă ca „linia de apă”. Se asigură condiția ca densitatea globală (vapor + încărcătură) să fie strict mai mică decât densitatea apei.

Exemplu: Greutatea unui vapor este de 100 000 kN. Ce volum de apă dislocuiește?

Răspuns:

Așadar, $\rho_{apa} \cdot V \cdot g = 10^8$, deci $V = \frac{10^8}{1030 \times 9,81} \cong 9900 \text{ m}^3$.

În Aeronautică, se practică utilizarea de baloane umplute cu heliu sau cu aer; 1 m^3 de heliu are greutatea de $1,8 \text{ N}$, iar 1 m^3 de aer are masa $1,29 \text{ kg}$ și greutatea $12,7 \text{ N}$. Un balon umplut cu heliu poate ridica o încărcătură de $12,7 - 1,8 = 10,9 \text{ N}$. Pe măsura ridicării în aer, densitatea aerului scade și pentru a face balonul mai ușor, se aruncă un lest de nisip, iar pentru coborâre, gazul este evacuat printr-o valvă specială. Pentru siguranța persoanelor, acum se preferă avioanele, deși sunt mai grele decât baloanele și aerul.

Unui submarin i se recomandă să nu coboare pe un fund regulat argilos, deoarece ar putea să nu mai plutească. Un motiv este acela că, între fundul submarinului și fundul mării, ar putea să nu existe apă și atunci ar dispărea forța ascensională, care ajută submarinul să plutească. Mai precis, să considerăm un submarin care se află aproape de fund, dar nu pe fund (figura 1.49.a). Asupra submarinului, acționează presiunea p_1 de sus și presiunea p_2 de jos.

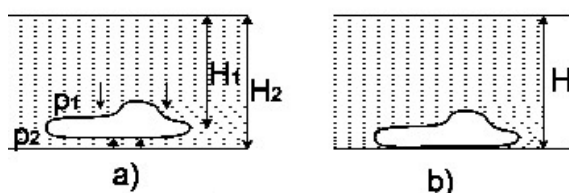


Fig. 1.49

Conform legii lui Pascal, $p_1 = \rho g H_1 + p_a$, $p_2 = \rho g H_2 + p_a$, deci $p_2 - p_1 = \rho g (H_2 - H_1)$, care formează tocmai forța ascensională arhimedică. Dar prin scufundarea pe fund argilos/mâlos, presiunea atmosferică nu se mai poate lua în seamă și

submarinul arată ca în figura 1.49.b); în acest caz, asupra submarinului acționează doar presiunea de sus, adică $p_1 = \rho gH + p_a$ și nu mai există forță ascensională!

6.4. Puțină hidrodinamică

În mișcarea fluidelor, apar forțe de frecare. Dacă acestea sunt neglijabile, fluidul respectiv se numește **ideal** și în caz contrar, **vâscos**. Vom presupune că fluidul (lichid sau gaz) are viteză și presiunea constante în fiecare punct. Într-o conductă, ca în figura 1.50, volumul de lichid presupus incompresibil care trece prin orice secțiune transversală este același, adică $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$ (v_1, v_2 fiind vitezele prin acele secțiuni) $S_1 > S_2 \Leftrightarrow v_1 < v_2$.

Dăm fără demonstrație două rezultate importante de mișcare a fluidelor („hidrodinamică”).

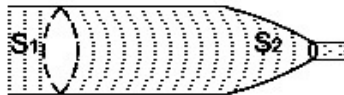


Fig. 1.50

TEOREMA (ECUAȚIA LUI BERNOULLI): „Are loc

relația $p + \rho gh + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const.}$, pentru orice secțiune transversală prin conductă, unde p =presiunea, ρ =densitatea

fluidului, h =înălțimea secțiunii prin conductă (în raport cu un nivel fixat), iar v =viteza fluidului prin secțiunea considerată”.

Așadar, are loc o relație de forma (figura 1.51):

$$p_1 + \rho g h_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}.$$

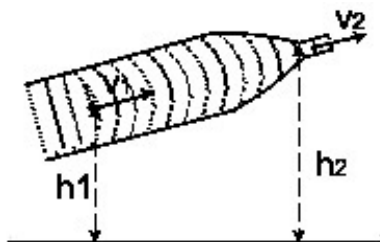


Fig. 1.51

Un alt rezultat fundamental, aplicat la proiectarea unor baraje sau conducte, este:

TEOREMA (lui TORRICELLI): „În legătură cu figura 1.52, are loc relația $v^2 = 2gH$, unde v =viteza particulelor de lichid incompresibil din vas la ieșirea printr-un orificiu și H =înălțimea coloanei de lichid de deasupra orificiului”.

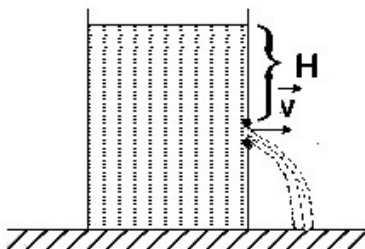


Fig. 1.52

CAPITOLUL 2 - FENOMENE TERMICE

Introducere

Sintagma „fenomene termice” înlocuiește pe cea de „căldură – frig”. În acest capitol, studiem în esență transferul de energie în cele mai diverse situații. Fenomenele termice au fost lămurite doar după anul 1800, când a fost descoperită structura moleculară a materiei și s-a constatat că o substanță caldă are un grad mai ridicat al mișcării moleculare în raport cu o substanță rece. S-au înțeles de atunci natura căldurii, temperaturii, a stărilor de agregare (gaz–lichid–solid), ca și fenomenele de transport al căldurii (conducție, convecție, radiație).

Termenul de „căldură” este mai dificil de explicat. Prin transfer (\equiv transport) de energie de la un obiect la altul se creează o diferență de temperatură și un flux de căldură de la corpul mai cald spre cel mai rece, reprezentând cantitatea de energie transferată.

Așa cum este uzanța la nivelul de prezentare a Fizicii de liceu, baza teoretică a conceptelor termice o constituie modelul gazului ideal, care este o bună aproximare a gazelor reale rarefiate. Paragrafele care urmează sunt o introducere în Termodinamică – știința interacțiilor din natură legate de temperaturi, presiuni, volume, energii interne și capacitate de a efectua lucru (mecanic).

Acest capitol se încheie cu un studiu introductiv al mașinilor și instalațiilor termice care, împreună cu cele electrice,

ne însoțesc viața cotidiană – automobile, tractoare, frigidere, centrale termoelectrice etc.

§ 1. ELEMENTE DE TEORIA CINETICO-MOLECULARĂ

1.1. Moli de substanță

Toate substanțele – apa (H_2O), aerul, pământul/solul, sticla, sarea ($NaCl$), țițeiul ($C_{10}H_{18}$), corpul uman, meteoriții etc. sunt alcătuite din molecule și atomi, aflați în mișcări dezordonate de translație, rotație sau vibrație. Moleculele sunt cele mai mici particule de materie care conservă proprietățile chimice ale substanțelor.

Trebuie amintite numele a doi semeni ai noștri, posesori de intuiții neobișnuite: Democrit ($\cong 500$ î.Ch.) care a introdus termenul „atom” (\cong indivizibil) și Avogadro (sec. XVIII) care a afirmat, profetic oarecum, că „moleculele sunt alcătuite din atomi identici”. Fenomenele termice (căldură – frig) sunt legate de agitația moleculară și, așa cum vom vedea, temperatura corpurilor măsoară energia medie a moleculelor care le compun.

Printr-o convenție admisă tacit de toată lumea s-a introdus următoarea

Definiție: 1 **mol** dintr-o substanță este acea cantitate din substanță (\cong materie) având un număr N_A de molecule, tot atâtea câte sunt în 12 grame de carbon.

S-a demonstrat indirect că $N_A \cong 6 \times 10^{23}$ (numit **numărul lui Avogadro**). Aceasta este o constantă fizică

universală, măsurată în $[\text{mol}^{-1}]$. Mai precis, $N_A \cong 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, dar ... nu vom avea nevoie de atâta precizie!

Notă: În natură există circa 120 de tipuri distincte de atomi, care corespund elementelor chimice H, O, C, N, Al, Si, Fe, Zn, Pb, Cu etc. Însă numărul moleculelor este imens. Trebuie menționat că la metale, moleculele sunt exact atomii.

Întrebare primară: câtă substanță se află într-un obiect?

De exemplu, cât fier (Fe) se află în această bară? Răspunsul uzual: 2 kg. Dar luând o bară de aluminiu (Al) tot de 2 kg, constatăm că volumul ei este triplu. Se mai poate atunci spune că barele au aceeași cantitate de substanță? Răspuns: Nu.

După ce a introdus noțiunea de densitate, Newton a arătat că masa diferă de cantitatea de substanță, aceasta din urmă fiind definită ca numărul de particule (molecule sau atomi) din care este alcătuită. În cazul Fe sau Al este vorba de atomi, iar la apă sau sare, de molecule.

S-a convenit ca unitatea pentru cantitatea de substanță să fie molul: **1 mol din orice substanță conține N_A molecule.**

Definiție: **Masa molară** (în grame), M_r , a unei substanțe este masa a N_A particule, adică masa unui mol din acea substanță (indicele „r” provine de la raportarea relativă la atomii de carbon). În loc de M_r se mai scrie μ .

S-au obținut experimental următoarele mase molare, care diferă de la o substanță la alta: $M_r(\text{C})=12 \text{ g}$, $M_r(\text{H})=1 \text{ g}$, $M_r(\text{O})=16 \text{ g}$, $\mu(\text{Fe})=56 \text{ g}$, $\mu(\text{Al})=27 \text{ g}$ etc. S-au indicat doar părțile întregi ale numerelor, renunțându-se la zecimale.

Masele molare sunt aditive, adică masa molară a unei substanțe mai complexe este suma maselor molare ale atomilor componenți.

Reținem că 1 mol de substanță are μ grame din acea substanță. Masa molară μ este numită și **masa moleculară**; valorile anterioare și altele similare nu trebuie învățate pe dinafară; ele sunt indicate în tabelul lui Mendeleev.

Exemple:

1) Avem $\mu(\text{H}_2)=2 \text{ g}$, $\mu(\text{O}_2)=32 \text{ g}$, $\mu(\text{H}_2\text{O})=\mu(\text{H}_2)+\mu(\text{O})=2+16=18 \text{ g}$; $\mu(\text{CO}_2)=44 \text{ g}$, $\mu(\text{CO})=28 \text{ g}$.

2) Deoarece μ grame de substanță conțin N_A particule, rezultă că 1 g are N_A/μ particule (atomi sau molecule). De exemplu, 1 gram de hidrogen molecular are $N_A/2 \approx 3 \times 10^{23}$ atomi și 1 g C are $N_A/12 \approx \frac{1}{12} 60 \times 10^{22} = 5 \times 10^{22}$ atomi.

3) Putem acum răspunde la întrebarea primară pusă anterior: 2 kg Fe au 2000 g Fe , deci $2000 \times N_A / 56 \approx 35 \times N_A$, adică 35 moli de fier. Iar 2 kg Al au $2000 \times N_A / 27 \approx 74 \times N_A$, adică 74 moli de aluminiu.

Așadar, masele sunt aceleași, dar molii (deci cantitățile de materie) diferă! Am definit molul; se pot considera unități sau subunități ale sale. De obicei, se mai folosește kilomolul: 1 kmol $\equiv 10^3$ moli și acesta are 6×10^{26} particule (molecule sau atomi).

De exemplu, 1 kmol de apă are 6×10^{26} molecule. Am văzut că 1 mol de apă are 18 g, deci 1 kmol de apă are masa de 18 kg. În mod similar, 1 kmol de fier are 56 kg.

1.2. Dimensiuni ale particulelor

Este important de reținut că s-a demonstrat experimental că în cazul gazelor, în condiții normale (adică la 0°C și la presiunea atmosferică):

1 mol din orice gaz ocupă volumul $V_{\mu,0} = 22,414 \text{ dm}^3 \cong 22,4 \text{ l}$, numit volum molar.

Atunci densitatea gazului, în condiții normale, este

$$\rho = \frac{\mu}{V_{\mu,0}} \quad (1)$$

Exemple:

$$\rho_{CO} = \frac{28}{22,414} \cong 1,249 \text{ kg/m}^3,$$

$$\rho_{CO_2} = 44 / 22,414 \cong 1,977 \text{ g/dm}^3 = 1,977 \text{ kg/m}^3.$$

Dar densitatea aburului nu se poate determina prin formula (1), deoarece el nu se află în condiții normale.

Folosind datele prezentate și îndeosebi valoarea numărului lui Avogadro, se pot deduce câteva proprietăți mecanice sau geometrice ale particulelor de materie. De regulă, se aplică „regula de trei simplă” și puțină aritmetică.

Să considerăm ν moli dintr-o substanță având masa molară (\equiv moleculară) μ .

Atunci:

- 1 g conține N_A/μ particule (molecule sau atomi) și masa m (în grame) a unei particule este

$$m = \frac{\mu}{N_A} \quad (2)$$

- numărul N de particule (presupuse congruente/identice) este $N = N_A \cdot \nu$, deci

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{N \cdot m}{N_A \cdot m} = \frac{M}{\mu} \quad (3)$$

unde M este masa totală.

- dacă ρ este densitatea în g/cm^3 a substanței considerate, atunci în 1 cm^3 intră ρ grame, deci conform (2), intră $\rho \cdot (N_A / \mu)$ particule și atunci o particulă are volumul

$$V_1 = \mu / (\rho \cdot N_A) \text{ cm}^3 \quad (4)$$

Example:

- 1) Masa unei molecule de hidrogen este, conform (2), $m(H_2) = 2 / (6 \times 10^{23}) = \frac{20}{6} \times 10^{-24} \cong 3,3 \times 10^{-24}$; atunci masa

unui atom de hidrogen este $\frac{1}{2} m(H_2) \cong 1,65 \times 10^{-24} \text{ g}$.

- 2) Câte molecule se află în 1 m^3 gaz (aflat în condiții normale)?

Răspuns: Conform (1), volumul a 1 kmol de gaz este $10^3 \times V_{\mu,0} \cong 22,4 \text{ m}^3$. Dar 1 kmol are 6×10^{26} molecule, deci în

$$1 \text{ m}^3 \text{ se află } \frac{6 \cdot 10^{26}}{22,4} = \frac{60}{22,4} \times 10^{25} \cong 2,7 \times 10^{25} \text{ molecule.}$$

3) Câte molecule se află în 1 kg oxigen ? Dar în 1 kg hidrogen?
Dar în 1 kg fier?

Răspuns: Conform (2), 1g de substanță conține N_A/μ particule. Atunci 1 kg oxigen conține $10^3 \times N_A/\mu = \frac{6 \cdot 10^{26}}{32} \cong 1,9 \times 10^{25}$ molecule și 1kg hidrogen va conține $\frac{6 \cdot 10^{26}}{2} = 3 \times 10^{26}$ molecule.

În fine, în 1 kg Fe se află $\frac{6 \cdot 10^{26}}{56}$ atomi.

4) Care este volumul V_1 (în cm^3) al unei particule de gaz în condiții normale? Dar raza ei r , dacă asimilăm particula cu o bilă sferică?

Răspuns: Aplicăm formula (4). Deoarece $\frac{\mu}{\rho} = V_{\mu,0}$ (conform (1)), rezultă $V_1 = \frac{V_{\mu,0}}{N_A} = \frac{22,4 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{23}} = 3,7 \times 10^{-26} \text{ m}^3$.

Din relația $V_1 = \frac{4\pi r^3}{3}$ rezultă $r^3 = \frac{3V_1}{4\pi} \cong 0,88 \times 10^{-26} = 8,8 \times 10^{-27}$ și $r \cong 2,1 \times 10^{-9} \text{ m} = 2,1 \text{ nm}$.

5) Care este volumul unei molecule de apă?

Răspuns:

Aplicăm formula (4), unde $\mu = 18 \text{ g/mol}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ g/cm}^3$ și $N_A = 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Atunci $V_1 \cong 3 \times 10^{-23} \text{ cm}^3$.

6) Care este distanța dintre doi atomi de fier?

Răspuns:

Mai întâi, aplicăm formula (4) pentru $\mu=56$, $\rho=7,8$; deci volumul unui atom de fier este
$$V_1 = \frac{56}{7,8 \times 6 \times 10^{23}} \cong 1,2 \times 10^{-23} \text{ cm}^3$$
. Asimilând atomul cu un cub de latură l , rezultă $l^3 = 1,2 \times 10^{-23}$, deci $l \cong 2,3 \times 10^{-8} \text{ cm}$.

Ținând cont că atomii de fier sunt „înghesuiți”, distanța cerută este tocmai l .

1.3. Conceptele principale ale teoriei cinetico-moleculare

Substanțele constau din molecule și atomi; într-un mol de substanță, indiferent de starea ei de agregare – solidă, lichidă sau gazoasă– se află N_A particule (molecule sau atomi), aflate în permanentă **mișcare termică**, al cărei caracter depinde de interacțiunile (\equiv ciocnirile) moleculare. Intensitatea mișcării termice depinde de gradul de încălzire a substanței, care influențează direct trecerea de la o stare de agregare la alta.

Moleculele pot avea mișcări de translație, rotație și oscilații/vibrații ale atomilor constituenți. Dacă molecula este monoatomică (de exemplu, în cazul metalelor Fe, Al, Cu etc., dar și în cazul He, Ar), atunci au loc îndeosebi vibrații.

Teoria cinetico-moleculară a structurii substanțelor este o mare realizare a Fizicii, bazată pe trei aserțiuni:

- orice substanță constă din particule – molecule și atomi;
- particulele se află în mișcare termică haotică;
- particulele interacționează.

Această teorie permite înțelegerea și explicarea coerentă a multor fenomene, începând cu stările de agregare ale substanțelor, răspunzând la întrebarea: cum se face că aceeași mulțime de particule „identice” (\equiv geometric congruente) pot forma corpuri atât de diferite? De exemplu, moleculele de apă formează când gheață, când apă sau abur. O explicație științifică se dă apelând la forțele de interacție a moleculelor.

Vom vedea de asemenea explicația pe care teoria cinetică–moleculară o dă fenomenelor (și proceselor) de vaporizare și fierbere a lichidelor.

Mișcarea termică a moleculelor este caracterizată prin **energia cinetică medie**, E_c , care determină un parametru macroscopic fundamental al gazului – **temperatura** T .

Acceptăm fără demonstrație următoarea **formulă a lui Boltzmann**: $E_c = \frac{3}{2}kT$, unde $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J / K}$ este o constantă universală a fizicii și T este temperatura absolută a gazului (în K). De asemenea, energia cinetică E_c și concentrația n (\equiv numărul de molecule în unitatea de volum) determină, așa cum vom vedea și un al doilea parametru macroscopic–**presiunea** p a gazului.

Dacă moleculele ar avea doar energie cinetică, atunci ele s-ar împrăști haotic în toate direcțiile și substanța ar ocupa întregul volum al vasului considerat și în acest caz, substanța s-ar afla doar în **stare gazoasă**. Dar moleculele au și energie potențială E_p , care depinde de distanțele dintre molecule. În

cazul când moleculele ar avea numai energie potențială, ele ar ocupa una față de alta poziții pentru care rezultanta forțelor care acționează pe fiecare moleculă din partea moleculelor vecine ar fi nulă, asigurând echilibrul mecanic. În acest caz, energia potențială de interacție ar fi minimă și singura stare posibilă a substanței considerate ar fi cea **solidă**. Acestea sunt cazuri limită. Dacă moleculele se mișcă și interacționează, ele au deopotrivă energie cinetică și potențială. Reținem ca un rezultat esențial, datorat teoriei cinetico-moleculare, următorul fapt: că un corp este solid, lichid sau gazos depinde de relațiile dintre E_c și E_p , iar tocmai modificarea acestor relații conduce la tranziția unei substanțe dintr-o stare de agregare în alta. Vom arăta mai în detaliu care este mecanismul acestor tranziții.

Menționăm că, în cazul solidelor, există o structură ordonată de rețea cristalină, unde nodurile sunt pozițiile de echilibru ale moleculelor izolate și în jurul acestor poziții moleculele oscilează (vibrează); dacă energia de legătură dintre atomi este mai mare decât energia care menține moleculele în rețea, atunci acestea își păstrează individualitatea. În cazul lichidelor, au loc toate cele trei tipuri de mișcare a moleculelor, așadar mișcări termice foarte complexe.

În starea solidă a unui corp, are loc inegalitatea $E_p \gg E_c$. Prin încălzirea corpului, crește E_c (fără ca E_p să se modifice) și dacă se ajunge în situația că $E_p \simeq E_c$, se atinge starea lichidă; în această stare, E_p este încă suficient de mare, astfel încât moleculele să nu se împrăștiie și, la rândul ei, E_c este suficient de

mare pentru ca moleculele să se deplaseze în interiorul vasului; în acest caz, lichidul își păstrează volumul și curge fără să-și păstreze forma. Încălzind mai departe lichidul, E_c crește și E_p devine neglijabil, atingându-se starea gazoasă.

Un argument experimental în favoarea teoriei cinetico-moleculare, asimilat cu o confirmare, l-a constituit descoperirea **mișcării browniene**. Aceasta nu trebuie confundată cu mișcarea termică a moleculelor. Mișcarea browniană este mișcarea unor macrocorpusculi –particule separate, de exemplu de polen –, care se ciocnesc de moleculele substanței de bază; ea se poate observa în lichide, cu microscopul uzual.

Menționăm, fără a analiza în profunzime fenomenele de vaporizare și fierbere a lichidelor (reluat ulterior), că explicarea descriptivă a acestora a fost un alt argument convingător al teoriei cinetico-moleculare. **Vaporizarea** constă în aceea că moleculele mai rapide din lichid înving atracția celorlalte și ies în afara lichidului. Unele molecule revin în lichidul inițial și vaporizarea este mai puternică dacă „ieșirea” este mai intensă decât „revenirea”. Desigur, mărirea suprafeței libere și încălzirea lichidului amplifică „ieșirea”, iar vânturarea de deasupra suprafeței de lichid îndepărtează moleculele ieșite și le împiedică revenirea. Din acest motiv, obiectele umede – cearceafuri, cămăși, ciorapi – se usucă mai rapid în prezența vântului. Dacă procesele de ieșire–revenire se compensează, aburul format deasupra lichidului devine saturat. De exemplu, dacă ținem pâinea într-un plastic, se întârzie evaporarea apei din

pâine, încetinind astfel uscarea pâinii. **Fierberea** este un proces mai subtil, ținând cont că orice lichid conține gaze; prin încălzirea lichidului, scade **solubilitatea** gazelor respective (sau, altfel spus, crește **volatilitatea** lor) și apar bule de gaz; acestea se ridică spre suprafața lichidului și începe fierberea. Vaporizarea are loc la orice temperatură, în timp ce fierberea începe la o temperatură bine determinată („punctul de fierbere”); această temperatură este menținută latent, la aceeași valoare, până ce întregul lichid fierbe. Micșorarea presiunii exterioare scade punctul de fierbere.

Exemplu: Presupunem că într-un balon de sticlă se află o cantitate mică de apă la temperatura camerei. Cu o pompă de vid, aspirăm aerul din balon aflat deasupra apei. Atunci vom constata că punctul de fierbere a apei coboară și se poate ajunge ca acest punct să se afle sub temperatura camerei!

§ 2. PROCESE TERMODINAMICE

2.1. Sisteme termodinamice

Termenul de **sistem** (sau sistem intrare–ieșire) este foarte general și îl înlocuiește pe cel de „cutie neagră”, în care intră ceva (numere, date statistice, semnale, informații etc.) și iese altceva, de aceeași natură. Diversele dispozitive, mașini, calculatoare și chiar școlile sau universitățile, sunt sisteme specializate. Se vorbește de asemenea de „sistemul de învățământ”, „sistemul sanitar”, sistemul electoral, energetic, polițist ș.a.

Sistemele termodinamice cuprind toate corpurile macroscopice, care primesc masă sau energie (căldură sau lucru) și cedează căldură sau efectuează lucru.

Exemplu: Apa dintr-un boiler, aerul din cameră, corpul uman, gazul conținut într-un recipient etc. sunt exemple de sisteme termodinamice.

Sistemele termodinamice pot fi: **izolate**, dacă nu schimbă energie cu exteriorul (sau neizolate, în caz contrar); **deschise**, dacă schimbă energie și masă; **închise**, dacă schimbă energie, dar nu masă.

Definiție: Se numesc **parametri de stare** ai unui sistem termodinamic mărimile fizice caracteristice, constante sau variabile în timp, care descriu comportarea aceluși sistem.

Starea unui sistem este setul/mulțimea parametrilor de stare.

Exemplu: Pentru orice fluid (gaz sau lichid) aflat într-un vas, volumul V , presiunea p , temperatura T și densitatea $\rho = \frac{m}{V}$

sunt parametri de stare. Dacă parametrii de stare ai unui sistem termodinamic sunt constanți pe un interval de timp, se spune că acel sistem se află în **echilibru**.

2.2. Procese termodinamice, ecuații de stare

Termenul de **proces** este legat de succesiunea în timp a stărilor unui sistem, determinând evoluția, dezvoltarea acestuia.

Definiție: Un **proces termodinamic** este o familie de stări care sunt intermediare între o stare inițială, notată s_i și alta

finală s_f ale unui sistem termodinamic. Trecerea de la o stare la alta se numește **transformare** (sau **tranziție**) de stare.

Exemplu: Presupunem că parametri de stare ai unui sistem termodinamic (de exemplu, un gaz) sunt volumul și presiunea. Dacă starea inițială este $s_i = (V_0, p_0)$ și starea finală $s_f = (V_1, p_1)$, atunci un proces este asimilat cu o curbă continuă situată în planul VOp , fără autointersecții, care unește punctele s_i și s_f (figura 2.1); orice punct s de pe curbă este o stare intermediară între s_i și s_f . În cazul când $s_i \equiv s_f$, curba este închisă și procesul se numește **ciclu termodinamic**.

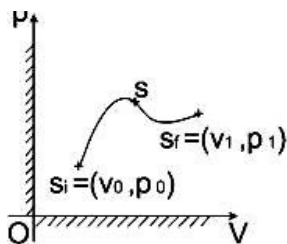


Fig. 2.1

Un proces termodinamic se numește: **izoterm**, dacă în lungul lui temperatura este constantă, **izobar**, dacă presiunea este constantă, **izocor**, dacă volumul se menține constant în lungul procesului și **adiabatic**, dacă în lungul procesului nu se realizează schimb de căldură cu exteriorul (sau echivalent, variația cantității de căldură este nulă adică $\Delta Q \equiv 0$).

Notă: Dacă un corp are temperatura t_C^0 (măsurată în grade Celsius), atunci **temperatura sa absolută** este $T_K = t_C^0 + 273$ (exprimată în grade Kelvin). De exemplu, temperatura 0°C

devine $T=273\text{K}$ (nu se scrie 273°K); temperatura 27°C are în grade Kelvin valoarea 300K , iar $-15^\circ\text{C}\equiv 258\text{K}$. Trebuie menționată și scara Fahrenheit, cu regula de transformare $t_F^0 = 1,8 \cdot t_C^0 + 32$ și, invers, $t_C^0 = \frac{5}{9}(t_F^0 - 32)$; de exemplu, $100^\circ\text{C}\equiv 212^\circ\text{F}$ și $0^\circ\text{F}\equiv -17,8^\circ\text{C}$.

O glumă: cât este de frig dacă este de două ori mai frig decât la 0°C ? Un răspuns se poate da trecând la temperaturi absolute: $0^\circ\text{C}\equiv 273\text{ K}$ și jumătate înseamnă $136,5\text{K}$, deci:

Răspuns: $-136,5^\circ\text{C}$.

Ca un principiu al termodinamicii, pentru orice corp, temperatura sa absolută este strict pozitivă și poate lua valori oricât de mari, deci $T_K \in (0, \infty)$.

De asemenea, $p>0$, $V>0$, deci în diagramele $V-p$, $V-T$ sau $T-p$, (respectiv în planele VOp , VOT , TOp), curbele care descriu procese termodinamice sunt situate în primul cadran.

Se vor studia doar procese termodinamice care au o **ecuație de stare**, de forma

$$p = p(V, T, \nu) \quad (5)$$

unde ν reprezintă numărul de moli de gaz ($\nu = \frac{M}{\mu}$, vezi (3)).

Exemplu: Să considerăm un vas cilindric cu gaz, cu un piston de arie A , apăsat cu o forță \vec{F} (figura 2.2).

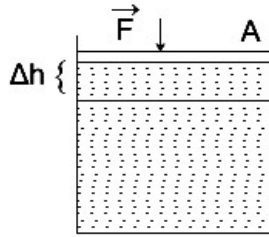


Fig. 2.2

Lucrul mecanic efectuat de această forță pe o distanță Δh este $\mathcal{L} = F \cdot \Delta h = \frac{F}{A} \cdot A \cdot \Delta h$. Dar $A \cdot \Delta h = \Delta V$ (variația de volum a gazului), deci

$$\mathcal{L} = \frac{F}{A} \Delta V = p \Delta V \quad (6)$$

Dacă presiunea p este constantă, cu valoarea $p=p_0$, atunci în diagrama p - V din figura 2.3, rezultă $\mathcal{L} = p_0 \Delta V = p_0 (V_2 - V_1)$, între valorile $V_1 < V_2$ ale volumului. Relația (6) este mai generală și se poate arăta că în lungul unui proces termodinamic având ecuația de stare $p=p(V)$, $V \in [V_1, V_2]$, lucrul efectuat este

$$\mathcal{L} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV \quad (7)$$

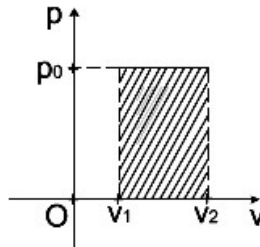


Fig. 2.3

2.3. Gazul ideal; legea gazelor ideale

În cele ce urmează, ne fixăm asupra unui model standard de sistem termodinamic, numit **gazul ideal** (sau **perfect**). Se presupune că moleculele se află la distanțe reciproce mult mai mari decât dimensiunile lor și, din acest motiv, moleculele sunt independente, forțele de atracție intermoleculară de tip gravitațional neavând nici un rol. Și totuși, acest model oarecum nerealist permite, așa cum vom vedea în continuare, descrierea satisfăcătoare a comportării macroscopice a gazelor. Trebuie menționat că, la temperaturi mari și presiuni joase, aerul și aburul pot fi asimilate cu gaze ideale.

Un prim rezultat fundamental îl constituie

LEGEA CLAPEYRON–MENDELEEV (a gazelor ideale):

„Are loc relația

$$p = \frac{\nu \cdot R \cdot T}{V}, \quad (8)$$

unde $\nu = \frac{M}{\mu}$ este numărul de moli și R este o constantă fizică

universală (numită **constanta gazelor ideale**), având valoarea $R=8,314 \text{ J/molK}$.”

Relația (8) se mai numește **ecuația gazului ideal**. Înainte de a da o demonstrație (într-un caz particular), deducem trei consecințe importante:

COROLAR 1 Pentru un proces izoterm (deci T și ν sunt constante), avem $p \cdot V = \text{constant}$ („legea Boyle–Mariotte”);

COROLAR 2 În cazul unui proces izobar (când p și v sunt constante), avem $\frac{V}{T} = \text{constant}$ („legea Gay–Lussac”);

COROLAR 3 Pentru un proces izocor (V și v constante), avem $\frac{p}{T} = \text{constant}$ („legea lui Charles”).

Istoriceste, aceste trei legi au fost stabilite experimental înaintea legii generale (8).

Vom stabili **ecuația gazului ideal** (8) în cazul particular când toate moleculele gazului au aceeași viteză și se deplasează în spațiu (raportat la un reper ortonormal $Oxyz$) pe o singură direcție și un singur sens din cele 6 posibile (de exemplu $+Ox$; în lungul axelor Ox , Oy , Oz sau al opuselor lor, de aici rezultă 6 posibilități), figura 2.4.

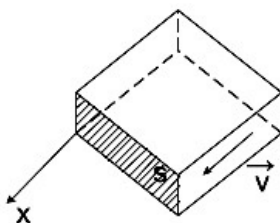


Fig. 2.4

Presiunea p este componenta normală a forței F împărțită la aria suprafeței pe care aceasta acționează. Conform legii a II-a a lui Newton, forța este variația impulsului (mv) în unitatea de timp. Așadar, presiunea pe perete este suma impulsurilor moleculelor care se izbesc în unitatea de timp pe unitatea de suprafață a peretelui. Presupunem că o moleculă de masă m zboară spre perete cu viteza v ; ca rezultat al ciocnirilor elastice

de perete, molecula își schimbă direcția mișcării în sens opus și se depărtează de perete cu aceeași viteză. Atunci variația impulsului este $mv - (-mv) = 2mv$. Presupunem că de suprafața S a peretelui se izbesc în unitatea de timp n molecule (toate mergând perpendicular pe perete, cu viteza v ; $n = \frac{N}{t}$, cu N =numărul de molecule ale gazului și t =timpul considerat). Așadar, $p = \frac{F}{S} = \frac{n \cdot (2mv)}{S}$. Am presupus că 1/6 din toate cele N molecule ale gazului se deplasează în sensul semiaxe pozitive Ox , către suprafața peretelui.

Considerăm paralelipipedul dreptunghic din figura 2.4, având volumul $V = v \cdot t \cdot S \Rightarrow n = \frac{N}{6t} = \frac{N}{6t} \cdot \frac{vtS}{V} = \frac{NvS}{6V}$. Atunci rezultă $p = \frac{2mv}{S} \cdot \frac{NvS}{6V} = \frac{1}{3}mv^2 \frac{N}{V}$. Dar $\frac{mv^2}{2} = E_c$ (energia cinetică medie) și conform formulei lui Boltzmann, evocate în 1.3, avem $E_c = \frac{3}{2}kT$, unde k este constanta lui Boltzmann. În concluzie, $p = \frac{1}{3} \cdot 2E_c \cdot \frac{N}{V} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \cdot \frac{N}{V} = N \cdot \frac{kT}{V}$.

Așadar, $pV = NkT$. Acest rezultat are loc în întreaga masă de gaz (nu doar în paralelipipedul considerat!) și, mai mult, este adevărat în condițiile cele mai generale. În fine,

notând cu M masa totală a gazului, μ =masa molară, conform

$$(3), \text{avem } N = N_A \cdot \frac{M}{\mu}, \text{ deci } pV = N_A \cdot \frac{M}{\mu} \cdot k \cdot T.$$

$$\text{Dar } \frac{M}{\mu} = \nu, \text{ conform (3) și notăm } R = N_A \cdot k. \text{ În}$$

concluzie, $pV = \nu RT$, adică tocmai (8).

În plus, $R = N_A \cdot k = 6,023 \times 10^{23} [\text{mol}^{-1}] \times 1,38 \times 10^{-23} [\text{J/K}]$, deci

$$R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K} = 8314 \text{ J/kmol} \cdot \text{K} \quad (9)$$

Notă: Pentru **gaze reale**, fizicianul olandez Van der Waals a stabilit o lege mai complicată decât ecuația (8); aceasta depășește cadrul acestui text.

Revenind la cazul gazului ideal, trebuie subliniat că ecuația (8) se poate scrie sub forma: $\frac{pV}{\nu T} = \text{const.}$ și că exprimă

o legătură între parametrii de stare ai unei aceleiași stări.

Așadar, pentru două stări distincte **1** și **2**, are loc relația $\frac{p_1 V_1}{\nu_1 T_1} = \frac{p_2 V_2}{\nu_2 T_2} (= R)$ și, dacă masa gazului nu se modifică de la o

stare la alta, atunci ν este constant, deci $\frac{pV}{T} = \text{const.}$, adică

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}. \quad (10)$$

2.4. Tipuri particulare de procese termodinamice

Mai întâi, reamintim câteva elemente de Geometrie analitică 2D. Considerăm un reper ortonormal xOy (după caz se pot folosi alte notații, pOV sau $p-V$, TOV sau pOT). O dreaptă neverticală trecând prin origine are ecuația $y=mx$, unde $m = \operatorname{tg} \alpha$ este coeficientul unghiular al dreptei ($\alpha = \text{panta}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$).

Curbele având ecuația de forma $y = \frac{k}{x}$ sau $xy=k$ (k fiind o constantă) se numesc hiperbole echilatre.

Exemple:

- 1) Reprezentăm în cadranul întâi dreptele $y=2x$ și $y=1$ (punctat).

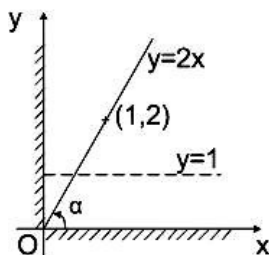


Fig. 2.5

- 2) Hiperbola $xy=4$ și hiperbola $y = \frac{1}{x}$ sunt reprezentate în 2.6.

Prima trece prin punctul (2, 2) și a doua prin punctul (1, 1).

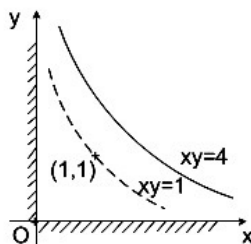


Fig. 2.6

a) În cazul unui **proces izoterm**, legea Boyle–Mariotte arată că $pV = \text{constant}$. În planul de coordonate pOV (echivalent ca notație, în diagrama $p-V$) recunoaștem o hiperbolă echilateră (figura 2.7). În lungul dreptelor paralele cu axa OV , presiunea este constantă și aceste drepte se numesc **izobare**. Dreptele verticale se numesc **izocore**. Dacă avem două stări (V_1, p_1) și (V_2, p_2) situate pe aceeași izotermă, atunci $V_1 p_1 = V_2 p_2$.

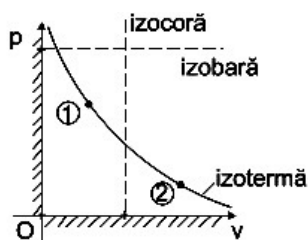


Fig. 2.7

b) În cazul unui proces izobar, avem $\frac{V}{T} = \text{const.}$; recunoaștem în planul VOT o semidreaptă trecând prin origine (figura 2.8), numită izobară. Pentru orice două stări (T_1, V_1), (T_2, V_2) situate pe aceeași izobară, avem $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

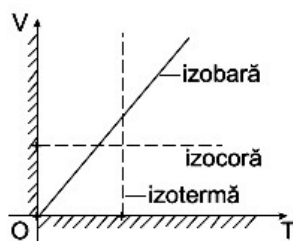


Fig. 2.8

c) Pentru un proces izocor, $\frac{p}{T} = \text{const.}$ și recunoaștem ecuația unei semidrepte trecând prin origine în planul pOT (figura 2.9) (diagrama $p-T$).

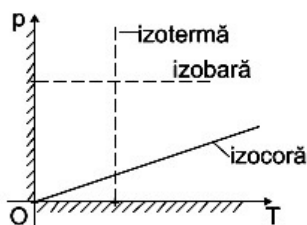


Fig. 2.9

Exemple:

1) Prin încălzirea unui gaz (ideal) s-a obținut dependența $p=p(T)$ din figura 2.10. Ce s-a petrecut în procesul 1-2 ?

Răspuns: Procesul este izocor și presiunea crește. Așadar, are loc o transformare izocoră.

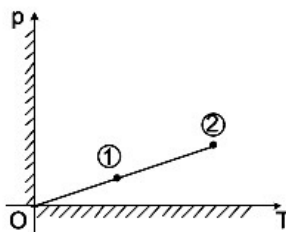


Fig. 2.10

2) În figura 2.11 sunt indicate două izoterme pentru aceeași masă de gaz, pentru două temperaturi diferite T_1, T_2 . Care din izoterme se referă la o temperatură mai mare?

Răspuns: Considerăm o izobară $p=p_0$ (asimilată cu o dreaptă orizontală). La presiune constantă, deoarece $\frac{pV}{T} = \text{const.}$ (conform (10)), rezultă că volumul gazului este cu atât mai mare cu cât temperatura este mai mare.

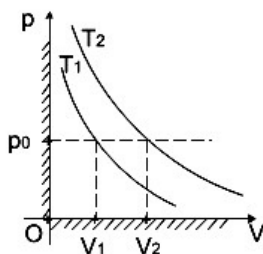


Fig. 2.11

Așadar, deoarece $V_1 < V_2$ rezultă $T_1 < T_2$. O izotermă mai apropiată de originea coordonatelor, în diagrama $p-V$ corespunde unei temperaturi absolute mai scăzute.

3) Se consideră figura 2.12, unde curba punctată este o izotermă. Ce se poate spune despre procesul 1–2?

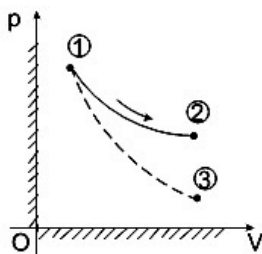


Fig. 2.12

Răspuns: Două izoterme în diagrama $p-V$ nu se pot intersecta (la fel două izobare sau izocore). Așadar, procesul 1–2 nu este izoterm. Depărtându-se de origine (în diagrama $p-V$),

temperatura crește și avem o destindere (deoarece crește volumul).

4) În figura 2.13, este redat un proces termodinamic 1–2–3–4–5 în planul VOT . Să se reprezinte grafic același proces în planele VOp și pOT .

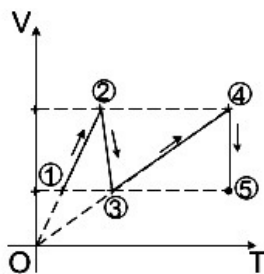


Fig. 2.13

Răspuns

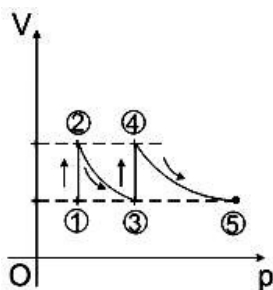


Fig. 2.14

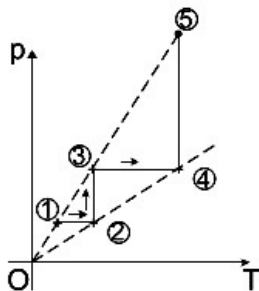


Fig. 2.15

Aplicație: umiditate, punct de rouă

În aerul atmosferic, la orice temperatură, există o anumită cantitate de vapori de apă. Dacă **presiunea parțială** a vaporilor de apă este mult mai mică decât presiunea atmosferică p_0 (notată uneori cu p_a), se spune că vaporii respectivi nu sunt saturați.

Vaporii saturați sunt cei aflați în echilibru cu lichidul din care provin, în sensul că moleculele care pleacă din lichid sunt aproximativ tot atâtea cât cele care se întorc. Umiditatea absolută este presiunea vaporilor nesaturați din aer. Prin definiție, **umiditatea relativă** este (p_s fiind presiunea vaporilor saturați):

$$f = \frac{p_0}{p_s} \times 100\% \quad (11)$$

Asimilând aburul cu un gaz ideal, presiunea aburului este direct proporțională cu masa de abur.

Conform legii (8), rezultă $pV\mu = MRT$, deci densitatea gazului este $\rho = \frac{M}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ și pentru T fixat, rezultă $\frac{\rho_0}{\rho_s} = \frac{p_0}{p_s}$, iar

conform (11), $f = \frac{\rho_0}{\rho_s} \times 100\%$.

Exemplu: Într-un recipient închis cu volumul V se află aer la temperatura t_1 , având umiditatea relativă f_1 . Câtă apă trebuie să se evapore suplimentar în acest recipient astfel încât umiditatea relativă să ajungă la f_2 ($f_2 > f_1$)?

Fie ρ_1 densitatea aburului la temperatura t_1 . După evaporarea a m grame de apă, densitatea aburului va deveni ρ_1

$+m/V$, deci $f_1 = \frac{\rho_1}{\rho_s}$ și $f_2 = \frac{(\rho_1 + \frac{m}{V})}{\rho_s}$, deci $\frac{f_2}{f_1} = 1 + \frac{m}{\rho_1 V}$, de unde

$m = (\frac{f_2}{f_1} - 1)\rho_1 V$ și cum $\rho_1 = f_1 \rho_s$, rezultă $m = \rho_s V (f_2 - f_1)$.

Valoarea densității ρ_s a vaporilor saturați se găsește în Tabelele termodinamice specializate.

Exemplu concret:

Dacă $t_1=20^\circ\text{C}$, $f_1=60\%$, $f_2=80\%$ și $V=3\text{m}^3$, avem $\rho_s=17,3\text{g/m}^3$ (din Tabele). Atunci $m = 17,3 \times \frac{20}{100} \times 3 \cong 10,4\text{ g}$.

Punctul de rouă este temperatura la care densitatea ρ_s a vaporilor saturați este egală cu ρ_0 , adică $f=100\%$. La atingerea acestei temperaturi, vaporii de apă aflați în aer încep să condenseze și ... cade rouă.

Astfel, dacă în exemplul anterior aerul din recipient se răcește la 10°C , atunci, tot din Tabele, $\rho_s=9,4\text{ g/m}^3$ și densitatea aerului va fi $\rho = \rho_s \cdot f_2 = 17,3 \times 0,8 \cong 13,8\text{ g/m}^3$.

Deoarece $\rho > \rho_s$, rezultă că va cădea rouă.

§ 3. CALORIMETRIE

Calorimetria se ocupă de măsurarea căldurii transferate de la un corp la altul.

Definiție: **Capacitatea calorică** a unui corp este mărimea

$$C = \frac{Q}{\Delta T}, \text{ (măsurată în J/K)} \quad (12)$$

unde Q este căldura schimbată de acel corp cu exteriorul (măsurată în J), iar ΔT este variația de temperatură (în K).

Definiție Raportul $c = \frac{C}{m}$ dintre capacitatea calorică și

masa corpului se numește **căldura specifică** a corpului, măsurată în J/kg · K.

Dacă $m=1$ kg și $\Delta T = 1K$, rezultă $c=Q$ (deci căldura specifică a unui corp este căldura schimbată cu exteriorul pentru a-și modifica temperatura cu 1K).

Din formula (12), rezultă formula fundamentală

$$Q = C \Delta T = mc \Delta T \quad (13)$$

Valorile lui c se găsesc în Tabele termodinamice. Iată câteva valori utilizate în exemplele date mai jos:

$c_{apă} \approx 4190$ J/kg · K; $c_{gheață} \approx 2089$ J/kg · K; $c_{Fe} \approx 447$ J/kg · K;
 $c_{Cu} \approx 385$ J/kg · K; $c_{Pb} \approx 130$ J/kg · K; $c_{Al} \approx 898$ J/kg · K.

Exemple:

1) Determinăm căldura care trebuie transmisă unei mase $m=0,2$ kg apă pentru a-i crește temperatura de la 10 la 45°C (se dă $c=4180$ J/kg · K).

Răspuns: Conform formulei (13),
 $Q = mc\Delta T = mc(T_f - T_i) = 0,2 \times 4180 \times (45 - 10) = 29260 \text{ J} \approx 29 \text{ kJ}$.

2) Un corp de fier și altul de cupru au aceeași masă și primesc aceeași cantitate de căldură. În ce caz, ΔT este mai mare?

Răspuns: Din formula (13), rezultă $\Delta T = \frac{Q}{mc}$, deci

$$(\Delta T)_{Fe} - (\Delta T)_{Cu} = \frac{Q}{m} \left(\frac{1}{c_{Fe}} - \frac{1}{c_{Cu}} \right) < 0, \text{ deoarece } c_{Fe} > c_{Cu}.$$

Definiție: Se numesc **combustibili** substanțele care degajă (transferă) căldură. **Puterea calorifică** a unui combustibil este raportul

$$q = \frac{Q}{m}, \text{ (măsurat în J/kg)} \quad (14)$$

dintre căldura degajată de combustibil și masa acestuia.

Dacă $m=1$ kg, atunci $q=Q$, deci puterea calorifică a unei substanțe este căldura degajată prin arderea a 1 kg din acea substanță.

Puterea calorifică se determină cu ajutorul unor dispozitive specializate, numite **calorimetre**.

Notă: În sistemul SI de unități, energia și, în consecință, lucrul mecanic și căldura se măsoară în J (jouli), cu sub- sau supraunități. În practică, se mai folosește ca unitate de măsură a căldurii **caloria**, cu regula de transformare:

1 cal \approx 4,19 J; 1 kcal \approx 4,19 kJ; 1 Gcal \approx 4,19 GJ; deci 1 J \approx 0,239 cal și 1 kJ \approx 0,239 kcal etc.

Exemplu:

Pentru lemn uscat (inclusiv pentru paie uscate), $q \approx 16470$ kJ/kg \approx 4000 kcal/kg; alcoolul are $q \approx 24000$ kJ/kg \approx 5700 kcal/kg; la benzină, $q \approx 11000$ kcal/kg și la cărbune huiă, $q \approx 7000$ kcal/kg.

Un rezultat fundamental îl constituie

ECUAȚIA CALORIMETRICĂ: „Într-un recipient care nu schimbă căldură cu exteriorul, suma căldurilor primite de corpurile reci este egală cu suma modulelor căldurilor cedate de corpurile calde:

$$\sum Q_{\text{primit}} = \sum |Q_{\text{cedat}}| \quad (15)$$

Exemple: 1) Într-un calorimetru, se toarnă $m_a=300$ g apă cu temperatura $t_a=20^\circ\text{C}$. Se introduce apoi o piesă de aluminiu, cu masa $m_{Al}=100$ g, care a fost ținută într-un vas cu apă fiartă.

Știind că $c_a=4190$ J/kg·K, $c_{Al}=920$ J/kg·K și neglijând capacitatea calorică a calorimetrului și pierderile în mediu, se cere temperatura θ de echilibru din calorimetru.

Soluție: Explicităm ecuația calorimetrică (15); apa este cea care primește căldura cedată de aluminiu, ajungând de la t_a la temperatura de echilibru θ , iar aluminiul se răcește de la temperatura de 100°C de fierbere a apei din vas, la θ .

Așadar, $m_a \cdot c_a \cdot (\theta - t_a) = m_{Al} \cdot c_{Al} \cdot (100 - \theta)$, deci $0,3 \cdot 4180 \cdot (\theta - 20) = 0,1 \cdot 920 \cdot (100 - \theta)$. Rezolvând această ecuație de gradul întâi, rezultă $\theta \cong 25,5^\circ\text{C}$.

2) Într-un vas cu $m_a=400$ ml apă la temperatura $t_l=15^\circ\text{C}$ se introduc: o bilă de plumb cu masa $m_2=100$ g, la temperatura $t_2=80^\circ\text{C}$ și o bilă de aluminiu cu $m_3=60$ g și $t_3=45^\circ\text{C}$. Să se calculeze temperatura θ de echilibru a amestecului. [Se dau: $c_a=4190$ J/kg·K, $c_{Pb}=125$ J/kg·K și $c_{Al}=920$ J/kg·K].

Soluție:

Așadar, $m_a = 0,4\text{ l} \times \rho_a = 0,4 \text{ dm}^3 \times 1 \text{ kg/dm}^3 = 0,4 \text{ kg}$, $m_2=0,1 \text{ kg}$, $m_3=0,06 \text{ kg}$ și ecuația calorimetrică devine $0,4 \cdot 4190 \cdot (\theta - 15) = 0,1 \cdot 125 \cdot (80 - \theta) + 0,06 \cdot 920 \cdot (45 - \theta)$; de unde rezultă $\theta \cong 16,4^\circ\text{C}$. Dacă nu se cunosc semnele parantezelor de tipul $(\theta - t_a)$ sau $(t_{Al} - \theta)$, acestea se consideră

în modul, ceea ce complică puțin rezolvarea ecuației calorimetrice.

3) O cameră are dimensiunile $5 \times 4 \times 3 \text{ m}^3$ și o sobă cu randamentul $\eta=30\%$, care încălzește aerul din cameră de la $t_1=15^\circ\text{C}$ la $t_2=20^\circ\text{C}$. Să se determine ce cantitate de lemne trebuie arse în sobă? [Se dau $c_{aer}=1000 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$; $\rho_{aer}=1,29 \text{ kg/m}^3$ și $q_{lemn}=16470 \text{ kJ/kg}$].

Soluție: Randamentul este $\eta = \frac{Q_u}{Q_c}$, unde Q_u este căldura

utilă (necesară) și Q_c căldura consumată. Așadar, $Q_u = 0,3 Q_c$.

Dar $Q_u = m_{aer} c_{aer} (t_2 - t_1)$; notând cu V volumul camerei (adică 60 m^3), rezultă $m_{aer} = 60 \times 1,29 \approx 77,4 \text{ kg}$, deci $Q_u = 77,4 \times 1000 \times (20 - 15) = 387000 \text{ J}$. Notând cu m masa de lemn necesară, rezultă $Q_c = 16470 \times m$. Așadar, $387000 = 0,3 \times 16470 \times m$, de unde $m \approx 78 \text{ kg}$.

§ 4. PRINCIPIUL I AL TERMODINAMICII ȘI CONSECINȚE

4.1. Enunțul principiului I

Termodinamica studiază schimbul (\equiv transferul) de energie, adică lucru sau căldură, între obiectele aflate în discuție sau cu mediul înconjurător. Pentru simplitate, am considerat ca sistem termodinamic gazul ideal închis într-o incintă, neglijând energia potențială a interacțiilor dintre particulele componente.

Am acceptat formula lui Boltzmann pentru energia cinetică medie a unei molecule, $E_c = \frac{3}{2}kT$, unde T este temperatura absolută. Dacă N este numărul de molecule ale unui gaz (ideal) cu ν moli, având **energia internă** U , atunci

$$U = N \cdot E_c = \frac{3}{2}NkT \stackrel{cf.(3)}{=} \frac{3}{2}N_A \nu kT = \frac{3}{2}(N_A k) \nu T \stackrel{cf.(9)}{=} \frac{3}{2}R \nu T.$$

În fine, folosind legea lui Clapeyron–Mendeleev (8), rezultă $U = \frac{3}{2}pV$.

Dacă masa de gaz este constantă, atunci energia lui internă poate fi modificată doar prin următoarele două procese:

- prin **efectuare de lucru** \mathcal{L} ; la destindere (\equiv creșterea volumului), gazul efectuează lucru asupra corpurilor înconjurătoare (de exemplu, deplasând un piston) și la comprimare, corpurile din jur efectuează lucru asupra gazului;
- prin **schimb** (\equiv transfer) **de căldură** Q între gaz și corpurile înconjurătoare.

Ca atare, între orice două stări, una considerată inițială și alta finală, variația energiei interne $\Delta U = U_f - U_i$, notată și U_{if} (adică diferența energiilor interne între cele două stări) va fi de forma $\pm \mathcal{L} \pm Q$.

Se fac următoarele convenții: Q se ia cu „+” (respectiv cu „-”) dacă sistemul considerat absoarbe, respectiv cedează căldură; \mathcal{L} se consideră pozitiv, respectiv negativ, când sistemul

efecutează lucru în exterior (respectiv asupra sistemului se efectuează lucru din exterior).

Putem enunța

PRINCIPIUL I: Are loc relația

$$Q = \mathcal{L} + \Delta U \quad (16)$$

În esență, principiul I afirmă că „nu se produce energie din nimic”, deoarece variația energiei gazului depinde de efectuarea de lucru și de transferul de căldură. Ca atare, principiul I este logic echivalent cu legea conservării energiei totale, enunțată în Capitolul I. 3.4 , relativ la sistemele mecanice, dar care se extinde la toate sistemele fizice (termice, electrice, chimice, nucleare etc.).

În mod practic, relația (16) se rescrie astfel: $Q_{if} = \mathcal{L}_{if} + \Delta U$, unde Q_{if} (respectiv \mathcal{L}_{if}) reprezintă diferența valorilor lui Q (respectiv \mathcal{L}) între orice două stări denumite ad-hoc inițială și finală. Cunoscând starea inițială și starea finală ale gazului considerat, se pot calcula lucrul și transferul de căldură. Iată câteva consecințe directe:

COROLAR 1: Pentru un sistem izolat (unde $\mathcal{L} = 0, Q = 0$), rezultă $\Delta U = 0$.

COROLAR 2: Dacă $\mathcal{L} = 0$ (niciun lucru efectuat de gaz sau asupra gazului), atunci $Q = \Delta U$.

COROLAR 3: Dacă $\Delta U = 0$, atunci $\mathcal{L} = Q$ (adică gazul absoarbe sau emite căldură, dacă și numai dacă face lucru).

4.2. Călduri molare, relația lui Mayer

Am definit căldura specifică c a unei substanțe (sau a unui corp) cu masa constantă M prin $c = \frac{Q}{M\Delta T}$ (relația (12));

deci c este tocmai căldura necesară pentru a ridica temperatura a 1 kg din acea substanță cu 1K. Dacă μ este masa molară a

substanței, se definește **căldura molară** $C_\mu = c \cdot \mu = \frac{Q}{M\Delta T} \cdot \mu$.

Dacă avem ν moli de substanță, rezultă $M = \nu \cdot \mu$ (conform

relației (3)), deci $C_\mu = \frac{Q}{\nu\Delta T} \stackrel{cf(16)}{=} \frac{1}{\nu} \left(\frac{\mathcal{E} + \Delta U}{\Delta T} \right)$. Ținând cont că

$\mathcal{E} = p\Delta V$ (conform relației (6)), rezultă

$$C_\mu = \frac{1}{\nu} p \frac{\Delta V}{\Delta T} + \frac{1}{\nu} \frac{\Delta U}{\Delta T} \quad (17)$$

În cazul unui **proces izocor**, avem $\Delta V = 0$ și în loc de C_μ

se notează C_ν ; așadar, $C_\nu = \frac{1}{\nu} \frac{\Delta U}{\Delta T}$ (numită **căldura molară la**

volum constant), de unde

$$\Delta U = \nu C_\nu \Delta T \quad (18)$$

În cazul unui **proces izobar**, C_μ se notează C_p (numită

căldură molară la presiune constantă); așadar, conform (17),

rezultă $C_p = C_\nu + \frac{1}{\nu} p \frac{\Delta V}{\Delta T}$. Dar aplicând (8), avem $pV = \nu RT$,

deci $\Delta(pV) = \Delta(\nu RT)$ și cum p , ν , R sunt constante, rezultă

$p\Delta V = \nu R\Delta T$, deci $\frac{1}{\nu}p\frac{\Delta V}{\Delta T} = R$. Ca atare, am demonstrat

următoarea relație fundamentală :

$$C_p = C_v + R, \quad (19)$$

numită **relația lui Mayer**. Tot lui Mayer îi datorăm prima formulare a legii universale a conservării energiei totale, într-o perioadă când noțiunile principale ale Termodinamicii nu fuseseră încă definitiv lămurite.

Notă: Din relația (19), rezultă că $C_p > C_v$; se poate arăta

că la gaze monoatomice, $C_v = \frac{3R}{2}$, deci $C_p = \frac{5R}{2}$; apoi la gaze

biatomice, $C_v = \frac{5R}{2}$ și $C_p = \frac{7R}{2}$, iar la gaze poliatomice,

$C_v = 3R$ și $C_p = 4R$.

4.3. Aplicarea principiului I la studiul transformărilor de stare

Vom considera procesele termice „simple”, în care câte unul din parametrii de stare (p , V sau T) este constant. Fixăm un gaz (ideal) cu masa constantă și având ν moli.

a) **Transformări izocore** ($V=\text{constant}$)

În acest caz, $\mathcal{L} = p\Delta V \equiv 0$, deci gazul nu face lucru și conform (16), $Q = \Delta U$. Dacă gazul se încălzește, atunci $Q > 0$ și ca atare $\Delta U > 0$, deci energia internă crește; iar dacă gazul se răcește ($Q < 0$), atunci energia sa internă scade. Pe de altă parte,

conform (11) avem $\frac{p}{T} = \text{const.}$ și conform (18),

$$Q = \Delta U = \nu C_v \Delta T. \text{ Reamintim că } C_v = \frac{3R}{2} \text{ (respectiv } \frac{5R}{2}),$$

dacă gazul este monoatomic (respectiv biatomic).

Exemple: 1) Un gaz monoatomic, conținut într-un vas închis având volumul $V = 4l = 4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, are temperatura inițială $t_1 = 15^\circ\text{C}$ și presiunea inițială $p_1 = 10^5 \text{ Pa}$; gazul este apoi încălzit la temperatura $t_2 = 120^\circ\text{C}$. Să se determine presiunea finală, căldura absorbită și lucrul efectuat.

Soluție: Trecem la temperaturi absolute, deci $T_1 = 288 \text{ K}$ și $T_2 = 393 \text{ K}$. Procesul fiind izocor, raportul $\frac{p}{T}$ este constant deci

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \text{ de unde } p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{393}{288} 10^5 \cong 1,36 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Apoi, conform (16) și (18), lucrul efectuat de gaz este nul și

$$Q = \Delta U = \nu C_v \Delta T = \nu \frac{3R}{2} \Delta T. \text{ Pe de altă parte, } p = \frac{\nu RT}{V} \text{ (cu } \nu,$$

$$R, V \text{ constante) deci } \Delta p = \frac{\nu R}{V} \Delta T, \text{ de unde } \nu R \Delta T = V \Delta p.$$

$$\text{Atunci } Q = \frac{3}{2} V \Delta p = \frac{3}{2} \cdot 4 \times 10^{-3} (1,36 \times 10^5 - 10^5) = 216 \text{ J.}$$

2) Într-o sticlă se află un gaz la temperatura absolută T_1 și presiunea atmosferică p_0 . Sticla a fost astupată cu un dop având aria secțiunii A și greutatea G și apoi dopul a fost apăsător

cu o forță de mărime F . La ce presiune p_2 și la ce temperatură T_2 trebuie încălzit gazul astfel încât să sară dopul?

Răspuns: Procesul este izocor, deci $\frac{p_0}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, deci

$T_2 = \frac{p_2}{p_0} T_1$. Asupra dopului se exercită forța $p_2 A$ (de jos în sus) și

forța $G+F+p_0 A$ (de sus în jos). Dopul sare după ce cele două forțe se echilibrează deci $p_2 A = G+F+p_0 A$, de unde rezultă p_2 și apoi T_2 .

b) Transformări izobare ($p=\text{constant}$)

În acest caz, $\frac{V}{T} = \text{constant}$ și lucrul efectuat de gaz este

$\mathcal{L} = p\Delta V$. Dar $pV = \nu RT$ (cu ν , R , p constante) deci

$$p\Delta V = \nu R\Delta T, \quad \mathcal{L} = \nu R\Delta T \quad (20)$$

De asemenea, $\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{\nu R}{p}$ și conform (17),

$$C_p = \frac{1}{\nu} p \frac{\nu R}{p} + \frac{1}{\nu} \frac{\Delta U}{\Delta T} = R + \frac{1}{\nu} \frac{\Delta U}{\Delta T}.$$

Aplicând relația lui Mayer (19), rezultă $\Delta U = \nu C_v \Delta T$.

Exemple: 1) Un recipient conține 3l de CO_2 la presiunea $p_0=10^5$ Pa și este încălzit izobar, astfel încât volumul gazului să crească de două ori. Să se calculeze lucrul efectuat de gaz, căldura absorbită și variația energiei interne în cadrul procesului.

Soluție: Gazul este triatomic, deci $C_v = 3R$, $C_p = 4R$ (conform relației lui Mayer). Volumul gazului a variat de la 3l la

6l, deci $\Delta V = 3l = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Atunci lucrul efectuat, în unitățile SI, este $\mathcal{L} = p\Delta V = 10^5 \cdot (3 \times 10^{-3}) = 300 \text{ J}$.

A p o i $Q = C_p \nu \Delta T = 4R \cdot \nu \Delta T \stackrel{cf.(20)}{=} 4\mathcal{L} = 1200 \text{ J}$ ş i

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = \nu \cdot 3R \cdot \Delta T \stackrel{cf.(20)}{=} 3\mathfrak{L} = 900 \text{ J.}$$

2) Un gaz ideal este încălzit izobar de la temperatura t_1 la t_2 ($t_2 > t_1$). Cu ce procentaj f îi crește volumul?

Răspuns:

Avem $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, deci $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{t_2 + 273}{t_1 + 273}$. Folosind proporțiile derivate, $\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{t_2 - t_1}{t_1 + 273}$ și $f = \frac{t_2 - t_1}{t_1 + 273} \times 100\%$.

Notă: Se arată că printr-o dilatare izobară, un volum V_0 la temperatura $t^{\circ}\text{C}$ devine $V = V_0(1 + \alpha\Delta t)$, unde $\alpha = \frac{1}{273} (\text{grad } \text{C}^0)^{-1}$.

c) Transformări izoterme ($T=\text{constant}$)

În acest caz, $p \cdot V = const.$ Deoarece $p = \frac{\nu RT}{V}$, rezultă

lucrul efectuat de gaz la o variație a volumului de la V_1 la V_2 :

$$\mathcal{L} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu RT (\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$\text{deci} \quad \mathcal{L} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (21)$$

Deoarece $T=\text{constant}$, energia internă a gazului nu variază, deci $\Delta U = 0$.

Conform principiului I (relația (16)), rezultă $Q = \mathcal{L}$.
 Dacă primește căldură ($Q > 0$), atunci $\mathcal{L} > 0$, deci gazul efectuează lucru; iar dacă $\mathcal{L} < 0$ (adică se efectuează lucru asupra gazului), atunci $Q < 0$ deci gazul cedează căldură.

Exemplu: Un gaz ideal cu volumul $V_1 = 1\text{l}$, la presiunea atmosferică p_0 se destinde izoterm până la volumul $V_2 = 2\text{l}$. Să se determine lucrul efectuat, căldura absorbită și ΔU .

Soluție: Conform (21)

$$\mathcal{L} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \stackrel{cf.(8)}{=} p_0 V_1 \ln 2 = 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot \ln 2 = 100 \times \ln 2,$$

cu $\ln 2 \approx 0,69$ (pentru logaritmi naturali în baza „e”; $e \approx 2,718$).

Așadar, $\mathcal{L} \approx 69\text{J}$. În fine, $Q = \mathcal{L}$ și $\Delta U = 0$.

d) **Transformări adiabatice** ($Q = 0$ căci nu se absoarbe sau cedează căldură)

Se poate arăta că în acest caz,

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T \quad \text{și} \quad pV^\gamma = \text{const.} \quad (22)$$

unde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, (deci $\gamma > 1$) este numit **indicele adiabetic**.

Conform (8), rezultă $\frac{\nu RT}{V} \cdot V^\gamma = \text{const.}$, deci $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const.}$

Conform principiului I, rezultă că lucrul efectuat de gaz este

$$\mathcal{L} = -\Delta U = -\nu C_v \Delta T. \text{ Pe de altă parte, } \gamma - 1 = \frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{R}{C_v}, \text{ deci}$$

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \text{ și } \mathcal{L} = -\nu \frac{R}{\gamma - 1} \Delta T . \text{ Deoarece, } pV = \nu RT , \text{ rezultă}$$

$$T = \frac{1}{\nu R} pV \text{ și } \Delta T = \frac{1}{\nu R} \Delta(pV) = \frac{1}{\nu R} (p_2 V_2 - p_1 V_1) . \text{ Ca atare,}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) \quad (23)$$

Exemplu: Un mol de gaz poliatomic, aflat la temperatura $t_1=15^\circ\text{C}$, cu volumul $V_1=5\text{l}$, se destinde adiabetic până la volumul $V_2=10\text{l}$. Să se determine temperatura finală, căldura absorbită, lucrul efectuat de gaz și ΔU .

Soluție: Așadar, $\nu=1$, $T_1=288\text{ K}$, $C_p=4R$ și $C_v=3R$, deci indicele adiabetic este $\gamma = \frac{4}{3} \cong 1,33$.

Dar $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$, deci $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$, adică $T_2 = T_1 \left(\frac{5}{10}\right)^{0,33} \cong 288 \times 2^{-0,33} \cong 229\text{ K} \cong -44^\circ\text{C}$. Apoi $Q = 0$, $\mathcal{L} = -\nu \cdot 3R \cdot \Delta T = -1 \times 3 \times 8,314 \times (229 - 288) \cong 1422\text{ J}$ și $\Delta U = -\mathcal{L}$.

Notă: Se consideră și alte transformări de stare pentru sisteme termodinamice închise, numite **procese politrope**, unde $\mu = \text{constant}$ și $pV^\mu = \text{const.}$ (μ este numit indicele politropic).

Din ecuația (8) a gazului ideal, rezultă atunci $TV^{\mu-1} = \text{const.}$ și $p^{1-\mu} T^\mu = \text{const.}$

Dacă $\mu=0$, regăsim procesele izobare; pentru $\mu=1$, procesele izoterme și pentru $\mu=\gamma$, procesele adiabatice. Apoi $p^{\frac{1}{\mu}} V = \text{const.}$ și pentru $\mu \rightarrow \infty$, se obțin procesele izocore.

În încheierea acestui paragraf, trebuie reținut următorul **tabel sintetic**: (Putem folosi principiul I $Q = \mathcal{L} + \Delta U$ ca test de verificare.)

Mărimea /Procesul	\mathcal{L}	Q	ΔU
izocor	0	$\nu C_v \Delta T$	$\Delta U = Q = \nu C_v \Delta T$
izobar	$\nu R \Delta T$	$\nu C_p \Delta T$	$\nu C_v \Delta T$
izoterm	$\nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	0
adiabatic	$-\nu C_v \Delta T$	0	$\nu C_v \Delta T$

§ 5. TRANZIȚIILE STĂRILOR DE AGREGARE

Așa cum am văzut în 1.3., Teoria cinetico-moleculară explică modul cum aceeași substanță poate trece (\equiv tranzita) prin cele trei stări de agregare: solidă/cristal (S), lichidă (L) și gazoasă (G).

Discutăm mai puțin despre cea de a 4-a, anume plasma (supraîncălzind un gaz, moleculele se desfac în atomi și atomii în subparticule încărcate electric, formând plasmă; aceasta se află de exemplu în Soare, dar și în laboratoare terestre speciale).

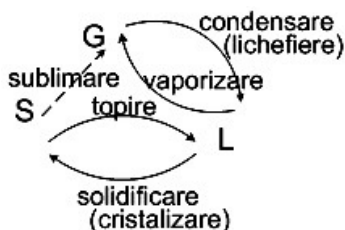


Fig. 2.16

Trecerea de la o stare la alta depinde de căldura introdusă/extrasă în/din sistem, de temperatură, presiune și de variația energiei interne. Moleculele sunt aceleași, dar pozițiile și interacțiunile lor, nu. Schema este cea cunoscută (figura 2.16).

5.1. Topire \rightleftharpoons Solidificare

Topirea ($S \rightarrow L$) este tranziția de la starea (\equiv faza) solidă la cea lichidă, în timp ce solidificarea (\equiv cristalizare $L \rightarrow S$) este tranziția inversă.

Exemplu: Trecerea de la gheață la apă și cea inversă, de la apă la gheață.

În cadrul topirii, substanța absoarbe (primește) căldură din exterior și la solidificare cedează (pierde) căldură. Topirea nu se face instantaneu și, până la încheierea ei, temperatura substanței este o constantă depinzând de material (“încheierea” topirii se face într-un punct numit punct de topire și notat T_t). De exemplu, în cazul topirii gheții, $T_t = 0^\circ\text{C} \equiv 273\text{ K}$. În figura 2.17 este redată evoluția în timp a temperaturii T_t în tranziția $S \rightarrow L$. Pe zona AB , are loc topirea la temperatura constantă T_t .

Un fapt important este că pentru topirea unei substanțe aflate la temperatura de topire, căldura Q și masa m , necesare ale substanței, sunt legate printr-o relație de forma:

$$Q = \lambda_t \cdot m, \quad (24)$$

unde λ_t este o constantă depinzând de substanță, numită **căldură latentă de topire** și ale cărei valori se găsesc în Tabele termodinamice. Pentru $m=1\text{ kg}$, rezultă $\lambda_t = Q$, deci λ_t este

căldura, măsurată în J, necesară pentru a topi integral 1 kg de substanță, aflată la temperatura de topire.

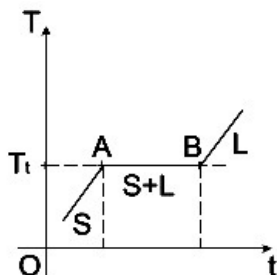


Fig. 2.17

La presiunea atmosferică, în cazul gheții, avem $T_t=0^\circ\text{C}$ și $\lambda_t=334 \text{ kJ/kg}$; pentru plumb, $T_t=327^\circ\text{C}$ și $\lambda_t=23,1 \text{ kJ/kg}$; pentru fier, $T_t=1530^\circ\text{C}$ și $\lambda_t=270 \text{ kJ/kg}$; și pentru mercur, $T_t=-39^\circ\text{C}$ și $\lambda_t=11,8 \text{ kJ/kg}$; în cazul aluminiului, $T_t=658^\circ\text{C}$ și $\lambda_t=380 \text{ kJ/kg}$.

Notă: În general, la topire volumul crește și densitatea scade (cu o excepție importantă - apa - unde $\rho_{\text{gheata}}=950 \text{ kg/m}^3$ și $\rho_{\text{apa}}=1000 \text{ kg/m}^3$). La o presiune mare, crește valoarea punctului T_t de topire și în cazul vidului, scade.

Exemple: 1) Să se determine căldura necesară pentru a transforma (la presiunea atmosferică) $m=200 \text{ g}$ gheață aflată la temperatura $t_0=-20^\circ\text{C}$, în apă la $t_2=80^\circ\text{C}$.

Răspuns: În figura 2.18 este redată dependența de timp a temperaturii substanței aflate în tranziție.

Cu notații transparente, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$, unde

$$Q_1 = Q_{AB} = m \cdot c_{\text{gheata}} \cdot (0 - t_0) = 0,2 \times 2090 \times 20 \cong 8360 \text{ J};$$

$$Q_2 = Q_{BC} = \lambda_t \cdot m = 334000 \times 0,2 \cong 66800 \text{ J}$$

$$Q_3 = Q_{CD} = m \cdot c_{apa} \cdot (80 - 0) = 0,2 \times 4180 \times 80 \cong 66800 \text{ J}$$

În final, $Q=142040 \text{ J}$.

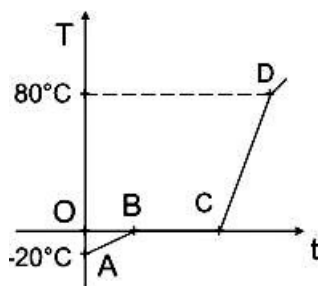


Fig. 2.18

2) Câtă căldură este necesară pentru a topi complet 10 kg plumb aflate la temperatura de topire?

Răspuns: $Q = \lambda_t \cdot m = 23,1 \times 10^3 \times 10 \cong 23 \times 10^4 \text{ J}$.

Solidificarea ($L \rightarrow S$) este tranziția de la starea (\equiv faza) lichidă la cea solidă. La solidificare, substanța cedează căldură și temperatura sa scade. Punctul de solidificare T_s este același cu cel de topire ($T_s \equiv T_t$); de asemenea, $\lambda_s \equiv \lambda_t$ (în modul).

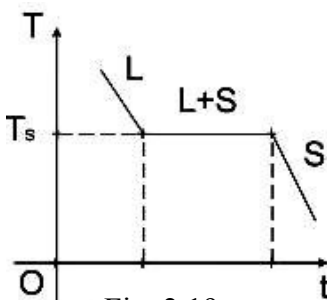


Fig. 2.19

Prin solidificare, volumul scade și densitatea crește (**excepție: apa**; tocmai datorită faptului că, în cazul apei,

$V_{gheata} > V_{apa}$ se sparg conductele iarna!). În figura 2.19 este redată evoluția temperaturii înainte și după solidificare.

5.2. Vaporizare \rightleftharpoons Condensare

La **vaporizare** ($L \rightarrow G$) se consumă căldură; moleculele aflate în lichid capătă o energie mai mare și ajung la suprafața lichidului, transformându-se în gaz; la **condensare** ($G \rightarrow L$) are loc procesul invers.

Până la încheierea vaporizării, temperatura este constantă, cu valoarea T_v (numită **punctul de vaporizare** sau fierbere, identic cu **punctul de condensare**). Are loc următoarea relație care dă căldura necesară vaporizării:

$$Q = \lambda_v \cdot m, \quad (25)$$

unde m este masa substanței lichide supuse vaporizării și λ_v este **căldura latentă de vaporizare**, măsurată în J/kg; λ_v este aceeași cu **căldura latentă de condensare**.

Dacă vaporii întâlnesc o suprafață rece, ei condensează; ne amintim condensul format pe pahare sau pe fereastră. De asemenea, reamintim că procesul prin care condensarea este însoțită de separarea lichidului format se numește **distilare** (întrebați fabricanții de spirt!).

Notă: Valorile lui T_v și λ_v pentru diferite substanțe se găsesc în Tabele termodinamice specializate. Astfel, la presiunea atmosferică, pentru apa pură, $T_v=100^\circ\text{C}$ și $\lambda_v=2300$ kJ/kg; pentru plumb, $T_v=1620^\circ\text{C}$ și $\lambda_v=912$ kJ/kg; pentru mercur,

$T_v=357^\circ\text{C}$ și $\lambda_v=272 \text{ kJ/kg}$; pentru aluminiu, $T_v=1800^\circ\text{C}$ și pentru amoniac, $T_v=-35^\circ\text{C}$. Dar la presiunea de 10 bari, apa se vaporizează la 180°C , iar la presiunea de 3 tori ($\cong 400 \text{ Pa}$), la numai $2 \dots 3^\circ\text{C}$!

Evoluția în timp a temperaturii substanței supuse vaporizării este redată în figura 2.20.

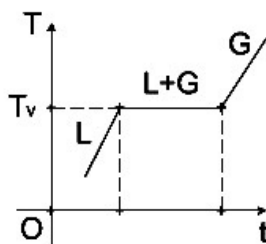


Fig. 2.20

Există două tipuri de vaporizare: în volum închis (în vid sau în atmosferă gazoasă) și în volum nemărginit, în două ipostaze: la suprafața liberă a lichidului (\cong evaporare) și în volumul lichidului (\cong fierbere). Fierberea are loc dacă presiunea vaporilor saturați este egală cu presiunea de deasupra suprafeței libere. Corpul uman își menține temperatura de circa 37°C , chiar și atunci când mediul înconjurător are o temperatură mai mare, tocmai datorită răcirii prin evaporare; anume, transpirația se evaporă la suprafața corpului, extrăgând energie din corp.

Exemple:

1) Câtă căldură este necesară pentru a vaporiza 1kg apă?

Răspuns: $Q=2300 \times 1=2300 \text{ kJ}$.

2) Comparați densitatea apei și a aburului saturat la temperatura $t=100^{\circ}\text{C}$.

Răspuns:

La 100°C , $p_s=10^5$ Pa și $\rho_s = \frac{m}{V} = \frac{p_s \cdot \mu}{R \cdot T} = \frac{10^5 \times 18}{8314 \times 373} \cong 0,58$, în timp ce $\rho_{apa} \cong 10^3 \text{ kg/m}^3$, deci densitatea ρ_s este de 1700 ori mai mică!

3) Într-o incintă vidată se introduce o masă m de apă la 0°C . Ce fracțiune din acea masă va îngheța ?

Soluție: Apa începe să se vaporizeze cu consum de căldură; o fracție f ($0 < f < 1$) va îngheța și $1-f$ se va evapora. Căldura de vaporizare este $Q = (1-f) \cdot \lambda_v \cdot m$ și căldura cedată la înghețare (\equiv solidificare) este $Q_1 = -f \cdot \lambda_t \cdot m$.

Conform ecuației calorimetrice (15), $Q = |Q_1|$, deci $f \cdot \lambda_t \cdot m = (1-f) \cdot \lambda_v \cdot m$ și rezultă f .

5.3. Sublimare – desublimare

Sublimarea ($S \rightarrow G$) este tranziția directă, fără a trece prin faza lichidă, de la faza solidă la cea gazoasă, iar **desublimarea** este tranziția inversă.

Exemple: Zăpada și gheața sublimează trecând direct în vapori. Ceva similar are loc în cazul arsenului. Faptul că iarna se usucă rufele înghețate este datorat sublimării și tot astfel se explică mirosul degajat de săpun sau detergenți.

5.4. Punctul triplu

Pentru orice substanță există o diagramă ca în figura 2.21. Temperaturile T_t , T_v , T_{sub} (adică punctele de topire, vaporizare, sublimare) depind de substanță și de presiunea externă.

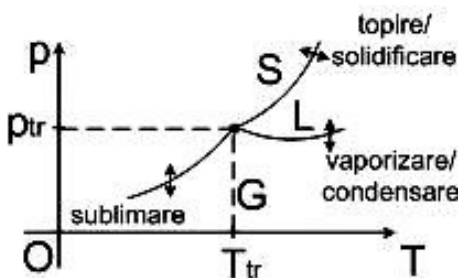


Fig. 2.21

În lungul curbelor întărite, coexistă câte două stări de agregare și există un singur punct unde coexistă cele trei stări de agregare $S-L-G$; acesta este numit **punctul triplu** al substanței.

Exemplu În cazul apei (Gheață–Apă lichidă–Abur), punctul triplu este $T_{tr}=0^{\circ}\text{C}$, $p_{tr}=0$ bari.

§ 6. MAȘINI TERMICE, TIPURI DE MOTOARE TERMICE

Încălzitoarele electrice conțin o spirală – rezistor, care transformă energia electrică în căldură, cu un randament de peste 0,99 (99%), iar o mică parte din energie este transformată în radiație luminoasă. Becul electric luminează dar nu este încălzitor. Orice „consum de energie” este de fapt o transformare dintr-o formă în alta. Energia electrică fiind scumpă, s-au creat

diverse alte sisteme care consumă căldură și efectuează lucru mecanic, convertind căldura în lucru, studiate în continuare .

6.1. Mașini termice

În cadrul unui proces termodinamic **ciclic** (\equiv ciclu termodinamic), sistemul schimbă căldură și lucru; în acest caz, energia internă a sistemului rămâne constantă, nemodificată (adică $\Delta U \equiv 0$).

Definiție: **Mașinile termice** sunt sisteme termodinamice care efectuează o transformare ciclică, schimbând lucru și căldură cu mediul extern.

Conform principiului I ($Q = \mathcal{L} + \Delta U$), rezultă $Q = \mathcal{L}$.

Definiție: Se numește **motor termic** orice mașină termică ce efectuează lucru asupra exteriorului, primind (\equiv absorbind) căldurile Q_1 de la o sursă caldă (numită **radiator** sau încălzitor), aflată la o temperatură T_1 și cedând căldura Q_2 unei surse reci (numită **condensator** sau răcitor), aflată la o temperatură T_2 , cu $T_2 < T_1$. Temperatura T_2 nu poate scădea sub temperatura mediului ambiant, pentru a putea realiza transferul lui Q_2 . Schema unui motor termic este indicată în figura 2.22. În acest caz, $\mathcal{L} > 0$ (motorul efectuează lucru) și $\mathcal{L} = Q_1 - |Q_2|$

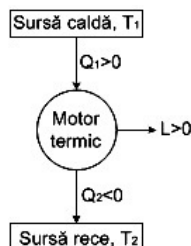
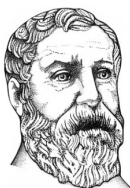


Fig. 2.22

Randamentul motorului termic este raportul adimensional

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}, \text{ deci } 0 < \eta < 1. \quad (26)$$



(Mașina termică a lui Heron; aburul scăpat prin cele două țevi imprimă un moment care rotește vasul!)



Există o clasă de mașini termice asupra cărora se efectuează lucru, transferând căldură de la o sursă „rece” (cu temperatura mai joasă) spre o sursă „caldă” (cu temperatură mai mare). O astfel de mașină este o **instalație frigorifică** (\equiv frigider), care funcționează după schema din figura 2.23.

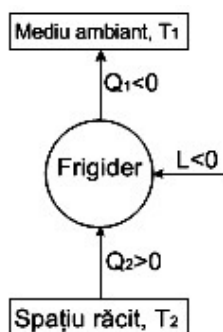


Fig. 2.23

Vom reveni în 6.2 asupra motoarelor termice.

Frigiderul primește căldură din incintă („spațiul răcit”), unde se menține o temperatură T_2 joasă și o transferă în casă („mediul ambiant”, aflat la temperatura T_1 , $T_1 > T_2$). Așadar, transferul de căldură se face de la „rece” la „cald”, ceea ce ar părea imposibil; în realitate, folosind lucrul \mathcal{L} efectuat de compresorul frigiderului (care folosește energie electrică), are loc relația $Q_1 = Q_2 + \mathcal{L}$.

Compresorul trimite agentul de răcire într-un sistem de tuburi și prin evaporarea agentului, se extrage energie din incintă, transportată în exteriorul frigiderului. Apoi, agentul de răcire în stare gazoasă este din nou condensat și presat prin evaporator, reluând ciclul.

Se definește **eficiența** frigiderului (numită și **coeficient de performanță**) prin raportul

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{\mathcal{L}} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (27)$$

Se poate întâmpla să avem $\varepsilon > 1$. Pentru un frigider tipic $\varepsilon \approx 5$.

Notă: Iată cum se poate folosi frigiderul pentru a încălzi iarna o încăpere: scoatem în stradă incinta frigiderului (celelalte părți le lășăm la loc); efectuând lucrul \mathcal{L} și extrăgând din stradă „căldura” Q_2 , transferăm în încăpere căldura $Q_1 = Q_2 + \mathcal{L}$.

Așadar, se „pompează” căldură de afară; în încăpere se face mai cald și pe stradă mai frig. Acest fapt a sugerat construirea unor mașini termice noi, numite **pompe de căldură**, folosite la încălzirea unor incinte, după schema din figura 2.24.

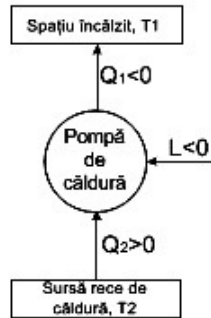


Fig. 2.24

Acestea sunt tot instalații cu compresor, care extrag energie din mediu (aer sau apă).

Eficiența pompei de căldură este acum raportul dintre căldura cedată spațiului încălzit și cea necesară pentru lucrul exterior ($\mathcal{E} = Q_1 - Q_2$):

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{\mathcal{E}} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (28)$$

folosind relația $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ și proporțiile derivate. Randamentul în sens uzual este desigur subunitar, ținând cont de motorul pompei de căldură.

Exemplu: Presupunem că temperatura aerului din stradă este $T_2 = -10^\circ\text{C} \equiv 263 \text{ K}$ și în încăpere dorim $T_1 = +20^\circ\text{C} \equiv 293 \text{ K}$.

Atunci eficiența pompei de căldură ar fi $\varepsilon = \frac{293}{293 - 263} \cong 9,7$.

Notă: Așadar, frigiderele și pompele de căldură transformă energie mecanică în căldură (invers decât motoarele termice). La frigidere, sursa rece este incinta și sursa caldă –

mediul exterior (incinta răcindu-se sub temperatura mediului exterior); la pompele de căldură, sursa rece este mediul și sursa caldă – incinta, care se încălzește peste temperatura mediului exterior. Frigiderele au devenit instalații de uz casnic după 1920.

Pompele de căldură, de exemplu, instalațiile de aer condiționat (care extrag căldură din încăperi și care pe timp friguros pot fi folosite ca încălzitoare) au devenit comerciale după 1960. Ele nu au înlocuit încălzitoarele electrice, deoarece sunt mai complicate și mai scumpe, având piese mobile supuse uzurii; dar cercetarea științifico-tehnologică nu este încheiată.

Orice mașină termică are o anumită substanță de lucru: combustibil lichid sau gazos pentru motoare, amoniac gazos pentru frigidere și apă în cazul pompelor de căldură.

Prin convenție, în cazul motoarelor termice, transformarea ciclică în planul p - V este parcursă în sens trigonometric, ca în figura 2.25 a); în acest caz aria închisă de ciclu este numeric egală cu \mathcal{L} ($A = \mathcal{L}$).

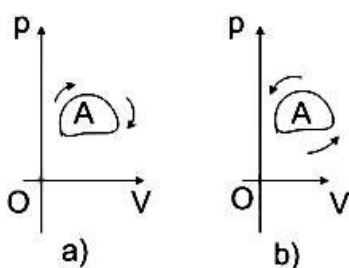


Fig. 2.25

În cazul frigiderele și pompelor de căldură, transformarea ciclică este parcursă în sens invers trigonometric

și $A=-\mathcal{L}$; figura 2.25 b). Se mai spune că acestea folosesc „ciclul invers”.

6.2. Tipuri de motoare termice

Căldura Q_1 provenită de la sursa caldă, transformată parțial în lucrul \mathcal{L} (figura 2.22) se obține prin arderea, în cilindrul motorului, de combustibil – păcură, benzină, motorină, hidrogen, alcool ș.a. Această căldură este transmisă substanței de lucru (aer, abur sau gaze de ardere), care își mărește temperatura și presiunea, apăsând pistonul mobil al cilindrului.

Motoarele se clasifică în mai multe moduri :

- cu **ardere internă** (inventate de germanii Nikolaus OTTO și Rudolf DIESEL, spre sfârșitul secolului al XIX-lea și utilizate în transport, în diverse industrii sau la centralele termoelectrice) sau cu **ardere externă** (utilizate la locomotive sau turbine cu abur, combustia făcându-se în alt loc decât cel unde căldura este transformată în lucru);
- **cu explozie** (ardere rapidă, ca în cazul motorului Otto) sau **cu injecție** (ardere lentă, ca în cazul motorului Diesel);
- **motoare în 2 timpi** (având o cursă dus-întors a pistonului) și **motoare în 4 timpi** (cu două curse complete dus-întors ale pistonului).

a) Descrierea motorului Otto

Combustibilul este un amestec de aer și vapori de benzină, realizat în carburator.

Amestecul este aspirat printr-o supapă de admisie într-un cilindru cu piston, prevăzut cu inele concentrice elastice (segmente).

Aprinderea se face cu o bujie, cu doi electrozi între care are loc o descărcare electrică; se produce o scânteie, combustibilul arde și produce vapori care împing pistonul, efectuând lucru. Pistonul este legat de un sistem bielă–manivelă (vilbrochen), care transformă mișcarea rectilinie dus–întors în mișcare continuă de rotație.

Printr-o supapă de evacuare, se asigură eliminarea gazelor, după care se reia ciclul de funcționare al motorului (figura 2.26).

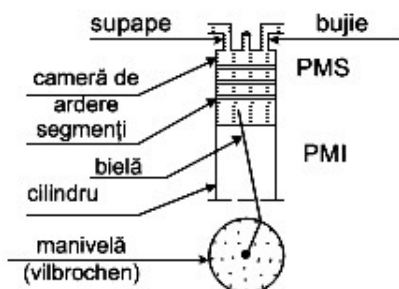


Fig. 2.26

Pistonul face o deplasare periodică între un „punct mort” superior (PMS) și unul inferior, durata de deplasare numindu-se **timp de funcționare**. Motorul Otto are 4 timpi: admisia, compresia, aprinderea și evacuarea. Ciclul **A–1–2–3–4–1–A** cuprinde două izocore și două adiabate și se repetă indefinit (figura 2.27).

Pe porțiunea **A–1**, are loc admisia, la presiunea constantă p_1 și volumul variază între valorile V_1 , V_2 ($V_1 > V_2$). Raportul adimensional supraunitar $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ se numește **raport de compresie**.

Pe porțiunea **1–2** se realizează o compresie adiabatică de la volumul V_1 la V_2 , fără schimb de căldură cu exteriorul, la presiunea p_2 . Apoi pe porțiunea **2–3** au loc aprinderea și detenta la volum constant și explozia la circa 20 de bari; amestecul arde progresiv în toată masa degajând căldura Q_1 trimisă la motor. Gazele de ardere se destind adiabatic pe segmentul **3–4**, împingând pistonul în punctul mort inferior și realizând lucrul mecanic necesar. Se deschide supapa de evacuare și presiunea scade spre presiunea atmosferică într-un proces izocor **4–1**, la volumul constant V_1 (figura 2.27). Substanța de lucru cedează în exterior căldura Q_2 . Pistonul elimină gazele arse și destinse la presiunea p_1 și volumul V_2 , reluându-se ciclul.

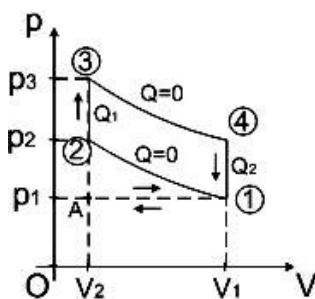


Fig. 2.27

Dăm o estimare a randamentului η al motorului Otto, presupunând că substanța de lucru este un gaz ideal cu ν moli.

Căldurile Q_1 , Q_2 menționate se determină cu ajutorul formulei (18):

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{2-3} = \nu C_v \Delta T = \nu C_v (T_3 - T_2); \\ Q_2 &= Q_{4-1} = \nu C_v (-(T_1 - T_4)) \end{aligned}$$

Atunci $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$. Pe de altă parte, pe adiabata **1-2**

avem $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$, deci $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$, de unde $T_2 = \varepsilon^{\gamma-1} T_1$. (γ = indicele adiabatic al gazului ideal).

Apoi pe adiabata **3-4**, avem $T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$. Deoarece $V_3 = V_2$ și $V_4 = V_1$, rezultă $T_3 = \varepsilon^{\gamma-1} T_4$.

Ca atare,

$$T_3 - T_2 = \varepsilon^{\gamma-1} (T_4 - T_1) \text{ și } \eta = 1 - \frac{\nu C_v (T_4 - T_1)}{\nu C_v (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

În final,

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} \quad (29)$$

Exemplu: Să considerăm un gaz poliatomic cu $\gamma = \frac{4}{3}$.

În tabelul următor, folosind formula fundamentală (29), dăm valorile randamentului Otto η pentru diverse rapoarte de compresie ε :

ε	3	5	7	10
η	0,31	0,41	0,47	0,54

ε nu poate crește prea mult, deoarece ar crește temperaturile de lucru și amestecul s-ar autoaprinde necontrolat.

Notă: Motoarele Otto (folosite și la automobilele mici) au randamente de circa 30% și lor li se adaugă mereu diverse perfecționări tehnice.

De exemplu, pentru a evita trepidațiile motorului, se leagă în serie mai mulți cilindri, iar acolo exploziile se fac pe rând.

b) Descrierea motorului Diesel

Acesta este tot un motor în 4 timpi, cu ardere internă, unde compresia aerului este separată de cea a combustibilului, limitând pericolele de autoaprindere. Locul bujiei este luat de o pompă de injecție, care pulverizează combustibilul (inclusiv motorină) în cilindrul motorului la presiune mare.

În figura 2.28 redăm diagrama V - p a ciclului Diesel, anume $A-1-2-3-4-1-A$, repetat indefinit.

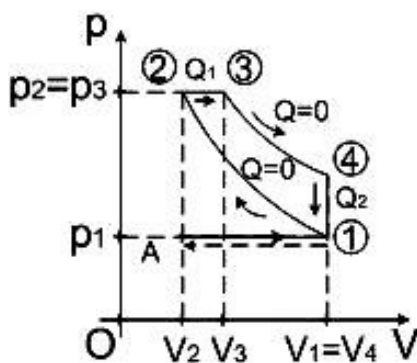


Fig. 2.28

Se deschide supapa de admisie și se aspiră aer la presiunea atmosferică; pe segmentul **A–1** se realizează o dilatare izobară; apoi se închid supapele, aerul este puternic comprimat și procesul este adiabatic pe porțiunea **1–2**. Pompa de injecție pulverizează motorină în cilindru și combustibilul arde izobar pe porțiunea **2–3**; prin arderea combustibilului se produce căldura Q_1 . Apoi gazele de ardere se dilată adiabatic (pe **3–4**) și pistonul cilindrului ajunge la punctul mort inferior, efectuând lucru.

În fine, se deschide una din supape, presiunea scade în cilindru și procesul este izocor pe **4–1**; sistemul cedează căldura Q_2 în exterior și pistonul evacuează gazele de ardere pe segmentul **1–A**, închizând ciclul.

Dacă substanța de lucru este un gaz ideal și notăm $\alpha = \frac{V_3}{V_2}$; $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$, se constată, în analogie cu formula (29), că

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha^\gamma - 1}{\varepsilon^{\gamma-1} (\alpha - 1)} \quad (30)$$

Notă: Se poate arăta că motorul Diesel are un randament mai bun decât motorul Otto. În practică s-au atins randamente de 35%. Trebuie de asemenea remarcat că motoarele Diesel folosesc un combustibil mai ieftin.

6.3. Turbina cu abur (sau cu gaz)

Aceasta este o mașină termică la care aburul (sau gazul) este încălzit la temperatură înaltă (sute de grade), rotind axul unui motor fără piston, tijă și arbore cotit. Un disc cu palete pe

ramă este fixat pe un ax; lângă palete, există niște conducte prin care intră abur de la un fierbător. Jeturile de abur exercită o presiune mare asupra paletelor și pun discul turbinei în rotație rapidă.

Turbinele moderne au mai multe discuri fixate pe axul comun, aburul trecând consecutiv printre palete și transferând paletelor energia sa.

La centralele termoelectrice, este conectat un generator de curent continuu, conectat la turbină. Turbinele cu gaz folosesc produse gazoase în loc de abur. Randamentul unei turbine cu abur nu depășește 30%.

§ 7. PRINCIPIUL AL II-LEA AL TERMODINAMICII

7.1. Ciclul ideal Carnot

Principiul I ($Q = \mathcal{L} + \Delta U$) al termodinamicii se mai numește „legea universală a conservării energiei”. Dacă $\Delta U = 0$, atunci $Q = \mathcal{L}$, ceea ce ar sugera posibilitatea transformării integrale a căldurii în lucru și invers. Principiul I furnizează bilanțul energetic al oricărei transformări, fără a da vreo informație asupra tipului de proces și fără a prezice stările sistemului termodinamic considerat. Astfel, prin arderea unui combustibil într-un motor termic, suma lucrului efectuat de mașină cu căldura cedată în exterior, este egală cu căldura primită, dar principiul I nu afirmă nimic despre randament (raportul dintre lucru efectuat și căldura absorbită).

Principiul al II-lea al termodinamicii stabilește sensul evoluției sistemelor termodinamice și limita superioară a randamentelor motoarelor termice reale.

Înainte de a formula acest principiu, sunt necesare câteva pregătiri. La începutul secolului al XIX-lea, inginerul francez Sadi Carnot a avut ideea că o mașină termică trebuie să funcționeze după un ciclu repetat indefinit și a descoperit ciclul termodinamic care îi poartă numele. Ciclul Carnot al unui motor termic ideal **a–b–c–d–a** constă din două izoterme la temperaturile T_1 , T_2 ($T_2 < T_1$), care alternează cu două adiabate, ca în figura 2.29, (unde lui 1 îi corespunde *a*, lui 2, *b* ș.a.m.d).

Ca agent de lucru al motorului, se consideră ν moli de gaz ideal având indicele adiabatic γ .

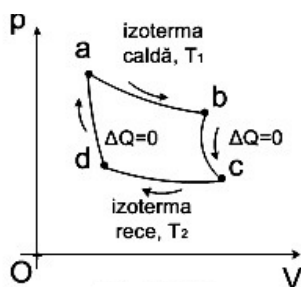


Fig. 2.29

Motorul are un cilindru cu piston și prin contact cu sursa de căldură la temperatura T_1 , pe izoterma caldă **a–b**, agentul efectuează lucrul $\mathcal{L}_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} > 0$, conform formulei (21).

Pe adiabata **2–3**, $\mathcal{L}_{23} = 0$ și similar, $\mathcal{L}_{41} = 0$.

Pe izoterma rece **c-d**, $\mathcal{L}_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_d}{V_c} < 0$. Motorul primește căldura $Q_1 = \mathcal{L}_{12}$ de la sursa caldă și cedează căldura $Q_2 = \mathcal{L}_{34}$ sursei reci, iar lucrul total este $\mathcal{L} = Q_1 - |Q_2|$. Atunci randamentul motorului va fi $\eta_c = \frac{\mathcal{L}}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$. Dar $\frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{(T_2 \ln \frac{V_c}{V_d})}{(T_1 \ln \frac{V_b}{V_a})}$. Însă în

lungul adiabatei **b-c** avem $T_b V_b^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1}$ și pe adiabata **d-a**, $T_d V_d^{\gamma-1} = T_a V_a^{\gamma-1}$.

Deoarece $T_b = T_a = T_1$ și $T_d = T_c = T_2$, rezultă $\frac{T_b}{T_c} = (\frac{V_c}{V_b})^{\gamma-1} = (\frac{V_d}{V_c})^{\gamma-1}$, de unde $\frac{V_c}{V_b} = \frac{V_d}{V_a}$, adică $\frac{V_c}{V_d} = \frac{V_b}{V_a}$.

Așadar, $\frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ și în final: $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ (31)

Se observă că randamentul η_c al ciclului Carnot nu depinde decât de temperaturile T_1 și T_2 , și nu de ν , γ , deci este independent de substanțele de lucru.

Exemplu: Randamentul unei mașini Carnot care funcționează între temperaturile $0^\circ\text{C}=273\text{ K}$ și $100^\circ\text{C}=373\text{ K}$ este $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{273}{373} \approx 0,27$, deci circa 27% din căldura

furnizată de sursa caldă este convertită în lucru, restul de căldură fiind „aruncată” spre sursa rece.

Notă: Ciclul Carnot este ideal și nu poate fi realizat tehnic, deoarece au fost excluse frecările și alte pierderi; se mai

spune că procesul respectiv a fost considerat reversibil (i.e. cu revenire completă la o stare anterioară).

7.2. Entropie

Am văzut că $\eta_c = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$ și $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, deci

$\frac{Q_2}{Q_1} + \frac{T_2}{T_1} = 0$, de unde $Q_2 \cdot T_1 + Q_1 \cdot T_2 = 0$ și

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (32)$$

Mai general, se poate arăta că pentru n surse de căldură, într-un ciclu **politerm** reversibil, în care se schimbă căldurile Q_1, \dots, Q_n cu cele n surse, la temperaturile T_1, \dots, T_n , are loc următoarea **relație a lui Clausius**: $\sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{T_k} = 0$

Definiție: Fie Q_k , $1 \leq k \leq n$, căldurile schimbate cu surse de căldură termostatare la temperaturile T_k , $1 \leq k \leq n$. Mărimea $\Delta S = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{T_k}$, măsurată în J/K, se numește **variația** (\equiv creșterea finitistă) **de entropie**, aceasta fiind nulă în cazul unui ciclu reversibil.

Exemplu: Să presupunem că un corp absoarbe 1J pe fiecare grad atunci când este încălzit uniform de la 15°C la 18°C. Atunci creșterea de entropie va fi:

$$\Delta S = \frac{1}{288} + \frac{1}{289} + \frac{1}{290} + \frac{1}{291} \cong 0,014 \text{ J/K.}$$

În natură nu există procese reversibile și dacă unui sistem aflat la temperatura T i se transferă o cantitate „mică” de căldură ΔQ , atunci variația de entropie este $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$. Dar dacă i se transferă o cantitate „mare” de căldură, aceasta se divide în porțiuni „infinitesimale” și se definește $\Delta S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta Q_k}{T_k}$ (limita fiind o integrală, notată $\int \frac{dQ}{T}$). Entropia S este o mărime care depinde de stare și pentru orice două stări a, b , $S(b) - S(a) \equiv \Delta S = \int_{a \rightarrow b} \frac{dQ}{T}$ (variația între cele două stări).

7.3. Enunțul principiului al II-lea

Principiul al doilea al termodinamicii are mai multe formulări.

Prima formulare a principiului al II-lea: „Pentru temperaturi date T_1, T_2 (cu $T_1 < T_2$), randamentul Carnot $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ este cel mai mare posibil dintre toate mașinile

termice funcționând între aceste temperaturi și nu este posibilă trecerea de la sine a căldurii de la un corp cu temperatura T_1 la un corp cu temperatură mai mare”.

În această formulare, este precizată limitarea teoretică posibilă pentru randamentul oricărei mașini termice reale.

Formularea macroscopică a lui Clausius: „În orice proces termodinamic, are loc inegalitatea $\Delta S \geq 0$, adică entropia crește de la o stare la alta”.

Acesta este sensul de evoluție al oricărui proces termodinamic. Prin extindere cvasi-filosofică, „săgeata timpului” este cea dată de creșterea entropiei oricărui sistem.

Formularea lui W. Thomson (\equiv Lord Kelvin): „Într-o transformare ciclică monotermă (\equiv cu o singură sursă de căldură), un sistem termodinamic nu poate efectua lucru, deci $\Delta U = 0, \mathcal{Q} \equiv Q \leq 0$; în cazul ireversibil, inegalitatea este strictă.”

Formularea „populară”: „În orice proces termodinamic real este imposibilă transformarea integrală a căldurii în lucru”.

Principiul I arată că este imposibil de construit un „perpetuum mobile” de speța I, adică o mașină care să facă lucru din nimic. Principiul II este mai nuanțat, arătând că o parte din căldură se transformă în lucru și alta (nenulă) este aruncată în mediu. Se poate arăta că aceste formulări sunt esențialmente echivalente, deducându-se logic una din alta, în condițiile unor definiții precise ale termenilor utilizați.

Principiile au un mare caracter de generalitate și nu se demonstrează; ele se înțeleg și se aplică!

Notă: Pe scurt, principiul I afirmă: „Energia se conservă”, iar principiul II: „Entropia crește”. Există și un al treilea principiu al termodinamicii: „Este imposibilă atingerea temperaturii de 0 K /zero absolut $\equiv -273,15^\circ\text{C}$ ”.

